

教育部高等学校特色专业建设教材

常微分方程

金银来 邱建龙 郭 政 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在临沂师范学院理学院多年教学实践的基础上,参考国内外一些同类教材,经过加工和补充编写而成的.考虑到近几十年科学技术的发展,作者尽量保持常微分方程知识结构的完整性并遵循易学易教的特点,在教学时数不增加及内容可选的前提下,适当补充实例和应用模型.在本书的最后几章,简要介绍了常微分方程边值问题、差微分方程、偏微分方程与泛函微分方程.

通过对该课程的学习,使学习者掌握常微分方程的基本概念、基本理论和初等解法等,为后继课的学习打下基础;同时,了解常微分方程的近代理论研究中某些基本内容,以开阔视野.另外,通过该课程的学习,使学习者对具有强烈实际背景的常微分方程模型有初步了解,这有助于推动常微分方程在社会生产实践中的应用.

本书可作为综合性大学和师范院校数学类本、专科学生常微分方程的教材.

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/金银来,邱建龙,郭政主编. —北京:电子工业出版社,2010.11

教育部高等学校特色专业建设教材

ISBN 978-7-121-11796-1

I. ①常… II. ①金… ②邱… ③郭… III. ①常微分方程-高等学校-教材 IV. ①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第176295号

策划编辑:张贵芹

责任编辑:张京

印刷:

装订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036

开本:787×1092 1/16 印张:11.5 字数:294千字

印次:2010年11月第1次印刷

印数:4000册 定价:23.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888

“香樟书库”总序

2006年8月,由我校教师主编的首批立项资助教材——“香樟书库”系列校本教材由山东大学出版社正式出版。在此基础上,根据教学计划和课程建设的实际需要,我们又很快启动了第二批立项教材的编撰工作。在学校教材建设指导委员会的组织、指导与协调下,教材编著者们夜以继日地辛勤劳作,如今已顺利完成了第二批教材的编撰工作,即将付梓面世。这批教材的编撰出版,既是我校校本教材建设工作步入规范化、系统化、科学化轨道的一种重要标志,也是我校认真贯彻落实教育部、山东省教育厅高等院校质量建设工程、促进学校内涵发展的一项重大举措。

我认为,对今日之高校而言,思路决定出路,就业决定专业,能量决定质量,质量决定力量。办学质量始终是一所学校的声誉之源、立校之本、发展之基,是高等院校的一条生命线。提高教学质量,理应是高校矢志不渝所追寻的永恒主题和永远高奏的主旋律,这就是我们常讲的“教学为本,质量立校”。而众所瞩目的高校办学质量又始终贯穿于实现“人才培养、知识创新和服务社会”三大职能的各个具体环节之中,其中既有人才培养的质量问题,也有科技成果和社会服务的质量问题,但人才培养质量是核心和旨归。孔子曰:“君子务本,本立而道生。”培养高质量人才是大学责无旁贷的神圣使命,而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学。课堂教学的基本要素是教师、学生和教材。

教材即教学材料的简称。细言之,它是指依据教学大纲和教学实际需要为教师、学生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像及计算机软件等。古人云:“书山有路勤为径,学海无涯苦作舟。”在漫漫求学路途上,千辛苦、万劳累,呕心沥血、夜以继日,书总会一直忠诚地陪伴着学习者,承前启后、继往开来,输送知识、启迪智慧,成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师,而学生之“书”的主体是教材。教材是教学内容和教学方法的知识载体,是教师实施课堂教学的依据和工具,是学生最基本的学习参考材料,是师生互动、教学相长、顺利完成教学任务的必要基础。“教本教本,教学之本。”教材建设水平,是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一。临沂师范学院历来重视教材建设工作,曾多次对教材建设工作进行专题研究。几年前,为了督导教师选用优质教材,提高教学质量,强化教学管理,优化教学环境,学校曾严格规定:全部本科教材均使用教育部、教育厅统编教材或获奖教材,禁止使用教师自编教材,从而保证了教材质量,为规范、完善本科教学工作奠定了良好的基础。

近年来,伴随着我国高等教育大众化的迅速推进和高校本科教学工作水平评估的深入进行,临沂师范学院实现了超常规、跨越式发展,其中之一是卓有成效地开展了“四大建设”,即“深化课程建设,优化专业建设,亮化学科建设,强化师资队伍建设”,使专业学科建设水平与教师教学水平不断提高,课程体系建设与课程开出能力不断增强,课堂教学改革与课外活动革新不断深入,相继涌现出一批质量上乘、优势明显、特色突出

的优质课程和爱岗敬业、授课解惑、教书育人的优秀教师，因而启动自编教材工作的条件日臻成熟。古人云：“临渊羡鱼，不如退而织网”。2006年，学校正式启动了首批立项教材建设工作，紧紧围绕人才培养目标，密切联系教学改革及课程建设实际，配合学校课程体系构建、教学内容改革及系列选修课程建设，在确保质量的基础上，正式出版了第一批校本教材，并于当年投入使用，得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价。在认真总结第一批立项教材建设经验的基础上，2007年，学校又启动了第二批立项教材的编撰与出版工作。

我校的教材建设是有计划、有组织、有步骤地进行的，经过教材建设指导委员会专家们的精心论证和严格审核，确定了校本教材建设的重点和选题范围：一是解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；二是体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势或特色的专业基础课和选修课教材；三是针对我校作为区域性院校特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材。

常言道：意识决定形态，细节决定成败。在教材编撰原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实性与前瞻性有效拓展。记得我国著名教育家张楚廷教授曾提出了教材编写的“五最”准则，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同。

在教材编写内容上，我们要求：既重视对国内外该领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育现实中所面临的新现象、新理论、新方法给予必要的回应；既考虑到如何有利于教师的课堂讲授与辅导，又顾及到如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校教学内容和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要。在教材教法改革上，我们倡导：秉持素质教育理念，坚持课堂讲授与课堂讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，“优化课内，强化课外”，重视教师启发式、研讨式、合作式等教学方式方法的科学运用，重视学生思维能力、创新能力、实践能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的协调发展创设条件。可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现。同时，所有教材均是在试用多年的成熟讲义的基础上经编著者精心修改和委员会严格审定后出版的，保证了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性。作者所撰章节，都是自己多年来多次授教与潜心研究的内容，在阐述上颇有真知灼见，能够引领和推动学生对有关基本理论和基本技能问题产生独特的理解和感悟，最终进入学与习、学与辑、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界。学校对所有立项出版教材均给予经费资助。

临沂师范学院“香樟书库”系列立项校本教材的编撰出版，包含了编著者们的辛勤劳动和指导委员会成员的热情支持。“香樟”为常绿乔木，树冠广展，枝叶茂密，香气浓郁，长势雄伟，乃优质行道树及庭荫树。我们之所以命名为“香樟书库”，乃在于香樟树根系发达，材质上乘，耐贫瘠，能抗风，适应性广，生命力强。它茁壮、清新、芳香，

代表健康、温馨、希望，寓意我们的校本教材建设一定也会像 2001 年首批由南方移植于我校校园，如今已是根深叶茂、枝繁冠阔的香樟树一样，生机勃勃，充满希望和力量。然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订。

最后，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的！”

临沂师范学院院长 韩延明

2008 年 6 月 26 日

草于羲之故里

前 言

《常微分方程》是一门研究自然科学和社会科学中的事物、物体和现象运动、演化和变化规律的最基本的数学理论和方法的学科。它的形成与发展是和物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域及其他科学技术的发展密切相关的，如运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨伏趋热、利率的浮动、市场均衡价格的变化等，对这些规律的描述、认识和分析就归结为对相应的常微分方程描述的数学模型的研究。因此，常微分方程的理论和方法不仅广泛应用于自然科学，而且越来越多地应用于社会科学各个领域。《常微分方程》在长期的发展过程中，一方面直接从与生产实践联系的其他科学技术中汲取活力；另一方面又不断以全部数学科学的成就来武装自己，所以它的问题和方法越来越丰富多彩。

《常微分方程》是数学与应用数学专业及信息与计算科学专业本科生的重要的专业基础课程之一，也是应用性很强的一门数学课。从数学的角度看，常微分方程分为经典和现代两部分内容：经典部分以数学分析、高等代数作为工具，以求微分方程的解为主要目的；现代部分主要是用泛函分析、拓扑学等知识来研究解的性质。这里的常微分方程是指经典部分内容，是重要的专业基础课程。常微分方程对先修课程（数学分析与高等代数等）及后继课程（微分方程数值解法、偏微分方程、微分几何、泛函分析等）起到承前启后的作用，是数学理论中不可缺少的一个环节，也是学生学习本学科近代知识的基础，对培养学生分析问题和解决问题的能力有重要作用。

本书是学校精品课程建设的阶段性成果之一。我们在编写本教材时，尽量吸收国内外《常微分方程》课程建设方面的最新研究成果和课程改革的先进经验，体现创新教学理念。编写过程中，根据多年的教学经验精选内容，注重思维开发和知识应用，内容深入浅出，让学生了解问题产生的背景。立足于激发学生的学习兴趣，有利于综合素质和创新能力的提高。因此，与同类教材相比，本教材体现了三大特点：第一，淡化知识体系的完备性和某些复杂形式，注重核心内容但简而不略；第二，加强了理论与实际的联系，注意该学科知识在其他学科，特别是在经济与工程技术方面的具体应用；第三，将数学建模思想融入教材中，特别是在每一章节中增加了与本章节知识密切相关的数学模型，而且在本书的第5章给出了微分方程知识综合应用的模型；通过对实际问题模型的学习，加强学生理论建模的思维训练，培养学生解决实际问题能力。同时，为加强《常微分方程》与后继课程的联系，本书的最后4章简要介绍了常微分方程边值问题、差微分方程、偏微分方程与泛函微分方程的基本概念与简单解法。鉴于《常微分方程》密切联系实际，思维方法独特，同时又是高校学生普遍感兴趣的课程。本书在每节都配备适量习题以加强理论知识的学习，这些题目有的是现实问题中的数学模型，有的是对基本理论的有益补充，在帮助学生开阔视野、提高应用能力训练等方面很有裨益。

在学校大力支持下，本教材作为我们“香樟书库”系列立项校本教材出版，这对我们

来说是一个巨大的鼓舞，正是学校领导和理学院领导的鼓励和帮助，才使我们有信心、有精力完成此书的编写工作。

本书除可作为普通师范类院校数学系的教材外，还可作为高等学校理工科及经济类各专业和其他相关专业相应课程的教材和参考书，还可作为准备报考研究生的学生和技术人员的参考书。

本书由金银来教授负责统一组织，邱建龙副教授和郭政统稿修改，李静、李锋、张冬梅、郭霄怡、刘溥臣和徐涵及 2009 级应用教学专业的硕士研究生杨锁玲、朱曼和郭丽艳同学也参加了本书编写工作。同时，本书在编写过程中部分地参考了业内知名专家、学者的著作，在此对各位专家、学者表示崇高的敬意和感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，书中疏漏与错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 微分方程基本概念与基本定理	1
1.1 微分方程基本概念	1
1.1.1 物理中的数学模型	1
1.1.2 基本概念	4
习题	6
1.2 常微分方程应用举例	7
习题	12
1.3 解的存在性与唯一性	13
习题	19
1.4 解的延展与比较定理	20
习题	24
1.5 解对初值的连续依赖性	24
1.6 解对初值的可微性	27
习题	30
第 2 章 初等积分法	31
2.1 初等积分法	31
2.1.1 分离变量法	31
2.1.2 线性方程	36
2.1.3 全微分方程与积分因子	37
习题	40
2.2 可化为初等积分法求解的方程	43
2.2.1 隐式方程	43
2.2.2 可降阶的高阶方程	45
习题	48
2.3 模型	49
习题	52
第 3 章 线性微分方程（组）	53
3.1 线性方程组的一般理论	53
3.1.1 一阶线性齐次微分方程组	54
3.1.2 一阶线性非齐次微分方程组	55
习题	56
3.2 常系数线性微分方程组	56
3.2.1 矩阵指数函数的定义和性质	57
3.2.2 基解矩阵	58

3.2.3 利用约当标准型求基解矩阵	59
习题	64
3.3 高阶线性方程	65
3.3.1 高阶线性方程的一般理论	66
3.3.2 常系数线性齐次方程的解法	68
3.3.3 常系数线性非齐次方程的解法	69
习题	71
3.4 拉普拉斯变换	72
习题	74
3.5 高阶微分方程的应用	74
3.5.1 机械振动	74
3.5.2 LRC 电路	77
习题	78
3.6 模型	79
第 4 章 定性和稳定性理论简介	81
4.1 稳定性概念	81
4.2 李雅普诺夫第二方法	84
习题	88
4.3 平面自治系统的基本概念	89
4.3.1 相平面、相轨线与相图	89
4.3.2 平面自治系统的三个基本性质	90
4.3.3 常点、奇点与闭轨	92
4.4 平面定性理论简介	92
4.4.1 初等奇点附近的轨线分布	92
4.4.2 平面非线性自治系统奇点附近的轨线分布	101
4.4.3 极限环的概念	102
4.4.4 极限环的存在性和不存在性	103
第 5 章 应用微分方程模型简介	106
5.1 人口与动物世界的微分方程模型	106
5.1.1 进行开发的单种群模型	106
5.1.2 无管理的鱼类捕捞模型	107
5.2 传染病的微分方程模型	109
5.2.1 传染病学基本概念	111
5.2.2 传染病模型	112
5.3 综合国力的微分方程模型	117
5.3.1 数学建模	117
5.3.2 数学分析	118
5.3.3 社会意义	119
5.4 作战模型	120
5.4.1 Lanchester 战斗模型	120

5.4.2 常规战模型讨论	122
第6章 常微分方程边值问题	124
6.1 边值问题基本概念	124
6.1.1 边值问题的提法	124
6.1.2 边值问题的某些性质	124
6.1.3 边值问题的可解性条件	125
6.2 边值问题的解法	128
6.2.1 待定常数法	128
6.2.2 借助格林函数的求解法	128
第7章 差分方程	132
7.1 差分方程基本概念	132
7.1.1 差分的概念	132
7.1.2 差分的运算法则与差分公式	133
7.1.3 阶乘函数	134
7.1.4 差分方程的概念	135
7.1.5 函数的求和问题	136
7.2 线性差分方程	139
第8章 偏微分方程	142
8.1 偏微分方程的基本概念	142
8.1.1 一般概念和记号	142
8.1.2 偏微分方程与常微分方程的比较	143
8.2 一阶偏微分方程	145
8.2.1 完全积分、一般积分和奇异积分	145
8.2.2 几类特殊的一阶偏微分方程	146
8.2.3 一阶拟线性偏微分方程	149
8.2.4 一阶偏微分方程组	152
第9章 泛函微分方程	157
9.1 问题的提出	157
9.1.1 历史背景	157
9.1.2 应用例子	157
9.1.3 名称及其缩写	163
9.1.4 若干注释	164
9.2 分步法	165
9.2.1 单滞量的情形	165
9.2.2 多滞量方程的分步法	167
参考文献	169

第 1 章 微分方程基本概念与基本定理

数学分析中所研究的函数,是反映客观世界运动过程中量与量之间的一种关系.在大量的实际问题中遇到稍微复杂的一些运动时,反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来,但比较容易建立这些变量和它们的导数(或微分)间的关系式.这种联系着自变量、未知函数及它的导数(或微分)的关系式,数学上称为微分方程,当然其中未知函数的导数或微分是不可缺少的.本章将概要地介绍常微分方程的一些物理背景、基本概念和基本定理.

1.1 微分方程基本概念

1.1.1 物理中的数学模型

三百年前,牛顿(I. Newton)和莱布尼兹(G. W. Leibniz)发明了微积分,同时也就开始了微分方程的研究,因此微分方程有着悠久的历史.

例 1.1.1 开普勒的行星绕日运动三定律.

牛顿万有引力定律:两个天体之间具有吸引力,吸引力与两个天体的距离的平方成反比,与它们的质量成正比,即

$$F = -G \frac{Mm}{|r|^2} \cdot \frac{r}{|r|}, \quad (1.1.1)$$

这里 G 是万有引力常数, M 和 m 分别表示两个天体的质量, r 是 M 和 m 两点的距离向量, $|r|$ 就是它们之间的距离.

为推出开普勒三定律,不妨设太阳的质量为 M , 行星的质量为 m , r 是位置向量, t 是时间. 由于太阳系中行星的总质量远远小于 M , 所以忽略其他行星的作用, 同时认为太阳是静止的. 这是一种近似, 从而若把坐标系的原点取在太阳上, 那么就建立一个惯性坐标系. 于是由已知行星运行速度的变化率为 $\frac{dr}{dt}$, 利用牛顿力学定律, 动量随时间的变化率等于力, 其数学表达形式就是微分方程:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) = F, \quad (1.1.2)$$

将式(1.1.1)代入方程(1.1.2)得到:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) = -G \frac{Mm}{|r|^2} \cdot \frac{r}{|r|}, \quad (1.1.3)$$

这便是行星绕太阳、月球绕地球、人造卫星绕地球等天体运动的微分方程. 将微分方程(1.1.3)解出,可以得到开普勒(J. Kepler)由实测数据总结出来的行星绕日运动三定律,即:

(1) 行星是在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运行的;

- (2) 行星到太阳的向径扫过的面积, 与时间成正比;
 (3) 行星周期 T 的平方与行星椭圆轨道的半长轴的三次方成正比.

例 1.1.2 物理冷却过程的数学模型.

将某物体置于空气中, 在时刻 $t=0$ 时, 测量的它的温度为 $u_0 = 150^\circ\text{C}$, 10 分钟后测量的温度为 $u_1 = 100^\circ\text{C}$. 我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系, 并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假设空气的温度保持为 $u_a = 24^\circ\text{C}$.

解: 为了解决上述问题, 需要了解有关热力学的一些基本规律. 例如, 热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的; 在一定的温度范围内 (其中包括了上述问题的温度在内), 一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例. 这是已为实验证明了的牛顿冷却定理.

设物体在时刻 t 的温度为 $u = u(t)$, 则温度的变化速度以 $\frac{du}{dt}$ 来表示. 注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的, 因而 $u_0 > u_a$, 所以温差 $u - u_a$ 恒正; 又因物体将随时间而逐渐冷却, 故温度变化速度 $\frac{du}{dt}$ 恒负. 因此由牛顿冷却定律得到:

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_a), \quad (1.1.4)$$

其中, $k > 0$ 是比例常数. 方程 (1.1.4) 就是物体冷却过程的数学模型, 它含有未知数 u 及它的一阶导数 $\frac{du}{dt}$, 这样的方程我们称为“一阶”微分方程.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系, 我们要从方程 (1.1.4) 中“解出” u . 注意到 u_a 是常数, 且 $u - u_a > 0$, 可将式 (1.1.4) 改写成

$$\frac{d(u - u_a)}{u - u_a} = -k dt,$$

这样, 变量 u 和 t 被分离开来了. 两边积分, 得到

$$\ln(u - u_a) = -kt + \bar{c},$$

这里 \bar{c} 是任意常数, 根据对数的定义, 得到

$$u - u_a = e^{-kt + \bar{c}},$$

由此, 令 $e^{\bar{c}} = c$ 即得

$$u = u_a + ce^{-kt}, \quad (1.1.5)$$

根据“初始条件”:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u = u_0,$$

容易确定任意常数 c 的数值. 为此目的, 以 $t=0$ 和 $u = u_0$ 代入, 得到:

$$c = u_0 - u_a,$$

于是:

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt}, \quad (1.1.6)$$

如果 k 的数值确定了, 方程 (1.1.6) 就完全解决了温度 u 与时间 t 的关系.

根据条件 $t=10$, $u = u_1$ 得到

$$u_1 = u_a + (u_0 - u_a)e^{-10k},$$

由此, 有

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a},$$

用给定的 $u_0 = 150$, $u_1 = 100$ 和 $u_a = 24$ 代入, 得到

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{126}{76} \approx 0.051,$$

从而

$$u = 24 + 126e^{-0.051t}, \quad (1.1.7)$$

这样, 根据方程(1.1.7), 就可以计算出任意时刻 t 物体的温度 u 的数值了. 例如, 20 分钟后物体的温度就是 $u_2 \approx 70^\circ\text{C}$. 方程还告诉我们, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $u \rightarrow 24^\circ\text{C}$, 这可以解释为: 经过一段时间后, 物体的温度和空气的温度将会没有任何差别了. 事实上, 经过 2 小时后, 物体的温度将变为 24.3°C , 与空气的温度已相当接近. 而经过 3 小时后, 物体的温度为 24.01°C , 我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度差别. 在实用上, 人们认为这是物体的冷却过程已基本结束. 所以, 经过一段时间后(如 3 小时后), 可以认为物体的温度和空气温度并没有任何差别了.

我们从例 1.1.1、例 1.1.2 中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤:

(1) 建立起实际问题的数学模型, 也就是建立反映这个实际问题的微分方程并提出相应的定解条件;

(2) 求解这个微分方程, 或者对方程解的性态进行分析;

(3) 用所得的数学结果解释实际问题, 从而预测到某些物理过程的特定性质, 以便达到能动地改造世界、解决实际问题的目的.

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的, 因为这需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解(例如, 例 1.1.2 中就要了解热力学中的牛顿冷却定律), 同时又需要有一定的数学知识. 为了建立实际问题的数学模型, 读者一定要学习有关的自然科学和工程技术的专业知识. 微分方程往往可以看做各种不同物理现象的数学模型. 我们在建立微分方程时, 只考虑影响这一物理现象的一些主要因素, 应把其他一些次要因素忽略掉. 如果的确考虑到了那些最主要的因素, 那么, 所得到微分方程的解和所考虑的物理现象就是比较接近的. 这时, 我们得到的数学模型是有用的. 否则, 我们还应该考虑其他的一些因素, 以便建立起更为有效、更为合理的数学模型.

不同的物理现象可以具有相同的数学模式这一事实, 正是现代许多应用数学工作者和工程人员应用模拟方法解决物理或工程问题的理论根据. 例如, 利用电路来模拟某些力学系统或机械系统等在现在已相当普遍.

以上只举出了常微分方程的一些物理背景, 其实在自然科学和技术科学的其他领域中, 如化学、生物学、自动控制、电子技术等, 都提出了大量的微分方程问题. 同样, 在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题. 因而社会的生产实践是常微分方程理论取之不尽的基本源泉. 此外, 常微分方程与数学的其他分支的关系也是非常密切的, 它们往往互相联系、互相促进. 例如, 几何学就是常微分方程理论的丰富的源泉之一和有力工具. 考虑到常微分方程是一门与实际联系比较密切的数学课程, 我们自然应该注意它的实际背景与应用; 而作为一门数学基础课程, 我们又应该把重点放在应用数学方法研究微分方程本身的问题上. 因此, 读者不应该忽视本课程中所举出的实际例子及有关的习题, 并从中注意培养解决实际问题的初步能力. 但是, 按照课程的要求, 我们要把主要的注意力集中到弄清常微分方程的一

些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法这两方面来,这是本课程的重点,也是我们解决实际问题的必要工具.

1.1.2 基本概念

以前已经学过,含有未知量的等式称之为方程.它表达了未知量所必须满足的某些条件.方程是根据对未知量所进行的运算来分类的,如代数方程、超越方程等.从以上两个例子得到的方程(1.1.3)、方程(1.1.4)可以看出,微分方程与代数方程和超越方程不同,它的未知量是函数,对其所施加的运算涉及求导或微分.因此对微分方程有如下定义.

1. 常微分方程和偏微分方程

凡含有自变量、未知函数及未知函数的导数(或微分)的等式称为微分方程.如果在微分方程中,自变量的个数只有一个,我们称这种微分方程为常微分方程;自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程.

如方程:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t); \quad (1.1.8)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + t \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad (1.1.9)$$

就是常微分方程的例子,这里 y 是未知函数, t 是自变量.

如方程:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0; \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.1.11)$$

就是偏微分方程的例子,这里 T 是未知函数, x, y, z, t 都是自变量.方程(1.1.10)含有三个自变量,而方程(1.1.11)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数.例如,方程(1.1.8)是二阶常微分方程,而方程(1.1.10)与方程(1.1.11)都是二阶偏微分方程,一般的 n 阶常微分方程具有形式:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (1.1.12)$$

这里 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ 是 $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数,而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$; y 是未知函数, x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程.今后,我们把常微分方程简称为“微分方程”,有时简称为“方程”.

2. 线性和非线性

如果方程(1.1.12)的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理整式,则称方程(1.1.12)为 n 阶线性微分方程.例如,方程(1.1.8)是二阶线性微分方程.一般 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x), \quad (1.1.13)$$

这里 $a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数.

不是线性方程的方程称为非线性方程, 例如, 方程:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (1.1.14)$$

是二阶非线性方程, 而方程(1.1.9)是一阶非线性方程.

3. 解和隐式解

如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(1.1.12)后, 能使它变为恒等式, 则称函数 $y = \varphi(x)$ 为方程(1.1.12)的解. 例如例1.1.2, 函数 $u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt}$ 就是方程(1.1.4)的解. 如果关系式 $\phi(x, y) = 0$ 决定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(1.1.12)的解, 我们称 $\phi(x, y) = 0$ 为方程(1.1.12)的隐式解, 例如一阶微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (1.1.15)$$

有解 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$; 而关系式:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1.1.16)$$

就是方程(1.1.15)的隐式解. 简单起见, 以后不把解和隐式解加以区别, 通称为方程的解.

4. 通解和特解

我们把含有 n 个独立的任意常数 c_1, c_2, \cdots, c_n 的解

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

称为 n 阶方程(1.1.12)的通解. 同样, 可以定义 n 阶方程(1.1.12)的隐式通解. 为了简单起见, 以后我们也不把通解和隐式通解加以区别, 统称为方程的通解. 为了确定微分方程一个特定的解, 我们通常给出这个解所必须满足的条件, 这就是所谓定解条件. 常见的定解条件是初始条件. 所谓 n 阶微分方程(1.1.12)的初始条件是指如下 n 个条件. 当 $x = x_0$ 时,

$$y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}, \quad (1.1.17)$$

这里 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数, 初始条件式(1.1.17)有时写为:

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.1.18)$$

求微分方程满足定解条件的解, 就是所谓定解问题. 当定解条件为初始条件时, 相应的定解问题就称为初值问题. 本书主要讨论初值问题.

把满足初始条件的解称为微分方程的特解. 初始条件不同, 对应的特解也不同. 一般来说, 特解可以通过初始条件的限制, 从通解中确定任意常数而得到. 例如, 在例1.1.2中, 含有一个任意常数 c 的解:

$$u = u_a + ce^{-kt},$$

就是一阶方程(1.1.4)的通解, 而:

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt},$$

就是满足初始条件:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u=u_0,$$

的特解. 特解(1.1.6)可以在通解(1.1.5)中令 $c=u_0-u_a$ 而得到.

容易验证, 二阶微分方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad (1.1.19)$$

的通解为:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}, \quad (1.1.20)$$

这里 c_1, c_2 是任意常数, 满足初始条件

$$y(0) = 2, \frac{dy(0)}{dx} = 1,$$

的特解为:

$$y = 3e^{-x} - e^{-4x},$$

可以在通解(1.1.20)中令 $c_1=3, c_2=-1$ 而得到.

5. 积分曲线

一阶微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.1.21)$$

的解 $y=\varphi(x)$ 代表 xy 平面上的一条曲线, 称它为微分方程的积分曲线. 而微分方程(1.1.21)的通解 $y=\varphi(x, c)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线, 我们称这族曲线为积分曲线族. 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0, y_0) 的一条积分曲线. 此外, 方程(1.1.21)的积分曲线的每一点 (x, y) 上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 刚好等于函数 $f(x, y)$ 在这点的值, 也就是说, 积分曲线的每一点 (x, y) 及这点上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 恒满足方程(1.1.21); 反之, 如果在一条曲线每点上其切线斜率刚好等于函数 $f(x, y)$ 在这点的值, 则这一条曲线就是方程(1.1.21)的积分曲线.

习题

1. 指出下面微分方程的阶数, 并回答方程是否线性的:

$$(1) \frac{dy}{dx} = 4x^2 - y;$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy = 0;$$

$$(3) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0;$$

$$(4) x \frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0;$$

$$(6) \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y = x.$$

2. 试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解, 这里 $\omega > 0$ 是常数:

(1) $y = \cos \omega x$;

(2) $y = c_1 \cos \omega x$ (c_1 是任意常数);

(3) $y = \sin \omega x$;

(4) $y = c_2 \sin \omega x$ (c_2 是任意常数);

(5) $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ (c_1, c_2 是任意常数);

(6) $y = A \sin(\omega x + B)$ (A, B 是任意常数).

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y = \sin x, \dot{y} + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$;

(2) $y = \frac{\sin x}{x}, x \dot{y} + y = \cos x$;

(3) $y = -\frac{g(x)}{f(x)}, \dot{y} = \frac{f'(x)}{g(x)} y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$;

(4) $y = e^x, \dot{y} e^{-x} + y^2 - 2y e^x = 1 - e^{2x}$.

4. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$:

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点 $(1, 4)$ 的特解;

(3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y dx = 2$ 的解;

(5) 绘出(2)、(3)、(4)中的解的图形.

5. 求下列两个微分方程的公共解:

(1) $\dot{y} = y^2 + 2x - x^4$;

(2) $\dot{y} = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$.

6. 求微分方程 $\dot{y} + x \dot{y}^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.

7. 微分方程 $4x^2 \dot{y}^2 - y^2 = xy^3$, 证明其积分曲线关于坐标原点 $(0, 0)$ 成中心对称的曲线也是此微分方程的积分曲线.

1.2 常微分方程应用举例

在自然科学和技术科学的各个领域, 都提出了大量的微分方程问题, 下面我们从多角度给出一些微分方程的实际背景和应用.

例 1.2.1 自由落体运动的规律.

自由落体运动是指物体在仅受地球引力的作用下, 初速度为零的运动. 根据经典力学的牛顿第二定律: 物体动量变化的大小与它受到的外力成正比, 其方向与外力的方向一致. 当物体的运动速度 v (与光速比较) 不大时, 其质量 m 可以是一恒量. 于是这一运动定律能表达成:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \text{ 或 } m \frac{dv}{dt} = F, \quad (1.2.22)$$

其中, F 表示物体所受外力的合力.

对于仅受到地球引力作用的自由落体的运动, 则有:

$$F = mg, \quad v = \frac{dS}{dt},$$

这里 g 表示重力加速度, S 表示自由落体运动的路程, 其大小以 S 表示.

注意到 S 的方向与 g 的方向一致, 我们可以得到自由落体运动路程大小变化的规律:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mg \text{ 或 } \frac{d^2 S}{dt^2} = g,$$

这个微分方程很简单, 能够通过直接求积分的方法得到路程大小 S 随时间变化的规律.

例 1.2.2 单摆运动.

单摆又称为钟摆或数学摆. 所谓单摆运动是指一质量为 $m > 0$ 的小球, 用长度为 l 的柔软细绳拴住, 细绳的一端固定在某点 O 处, 小球在铅锤平面内运动. 略去空气的阻力和细绳在 O 点处的摩擦力, 并且认为细绳的长度 l 不变, 仅考虑地球的引力和细绳对小球的拉力.

在铅锤平面内引进以 O 为坐标原点的极坐标系. 由于细绳长度不变且细绳总是直的, 所以小球的位置用一个坐标 $\theta(t)$ 就能表示. 这里 θ 表示细绳 l 和铅锤方向之间的夹角. 铅锤方向即小球的平衡方向, 它对应的 θ 为零.

作用在小球上的地球引力的大小为 mg , 其方向铅锤向下. 重力沿细绳方向的分力的大小为 $mg \cdot \cos\theta$, 其方向沿细绳指向外. 这个力与小球运动所需要的向心力正好平衡. 所以小球沿细绳方向没有运动. 重力在垂直于细绳方向的分力的大小为 $mg \cdot \sin\theta$, 它的方向与角 θ 增加的方向相反.

根据牛顿第二定律得到单摆运动的规律为:

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg \sin\theta, \quad (1.2.23)$$

根据圆周运动规律有: $l \frac{d\theta}{dt} = v$, 于是从式 (1.2.23) 得出:

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \cdot \sin\theta, \quad (1.2.24)$$

由于从方程 (1.2.24) 直接求 θ 随时间变化规律的解析表达式比较困难, 我们在 $|\theta|$ 比较小的时候, 对其进行线性化处理, 即用 θ 代替 $\sin\theta$, 或者说, 用 θ 近似 $\sin\theta$. 这样得到方程 (1.2.24) 的线性化微分方程:

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \cdot \theta$$

可从中求得 θ 随时间 t 变化的近似规律.

例 1.2.3 放射性物质的衰变.

放射性物质的原子核很不稳定, 会自发地放出射线, 变为另一种元素的原子核, 这种现象称为放射衰变. 实验表明, 原子核数目为 N 的镭, 在单位时间衰变的原子核数目与 N 成正比, 即

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1.2.25)$$

这里 $\lambda > 0$ 是常数.

现在研究怎样求方程 (1.2.25) 的解, 移项得

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0,$$

因为 $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} N) \equiv e^{\lambda t} \left(\frac{dN}{dt} + \lambda N \right)$, 所以:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} N) = 0,$$

从而得到:

$$e^{\lambda t} N = c, \quad c \text{ 是任意常数.}$$

我们称:

$$N = ce^{-\lambda t}$$

是方程(1.2.25)的通解. 更进一步, 设在 $t=0$ 时镭的原子核数目为 N_0 , 即得到柯西问题方程:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\lambda N; \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (1.2.26)$$

并且可以直接求出这时 $c = N_0$, 所以柯西问题的特解为:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

例 1.2.4 延时器的设计原理.

气动延时器是利用恒容容器中气体排放规律设计的计时装置. 设容器中充满具有一定压强的气体, 从某时刻开始经过毛细管向外排放, 当容器中气体达到一定压强 p_1 时发出信号, 达到计时的目的. 设初始时气体压强为 p_0 , 在时刻 t 时的压强为 $p(t)$, 根据实验, 它的变化速度与压差 $p(t) - q$ 成正比, 其中 q 是大气压强, 即:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\lambda(p(t) - q), \quad p(0) = p_0, \quad (1.2.27)$$

这里 $\lambda > 0$ 是常数, 它与毛细管的内径有关. 试问: 为了计测时间 T , 应如何选择 λ , 使得在 $t = T$ 时, 压强 $p(t)$ 的变化速度为最大, 这时的气体压强 p_1 称为发信压强.

首先求解方程(1.2.27). 由于:

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}[p(t) - q]\} \equiv e^{\lambda t}\left\{\frac{dp}{dt} + \lambda[p(t) - q]\right\} = 0,$$

所以:

$$e^{\lambda t}[p(t) - q] \equiv c \quad (c \text{ 为任意常数}),$$

即:

$$p(t) = q + ce^{-\lambda t}.$$

再根据 $p(0) = p_0$ 得 $c = p_0 - q$, 所以方程(1.2.27)的解为:

$$p(t) = q + (p_0 - q)e^{-\lambda t}.$$

由此, 可以计算在 T 时刻 $\frac{dp}{dt}$ 的值为:

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=T} = -\lambda(p_0 - q)e^{-\lambda T},$$

选取 λ 使得 $-\lambda(p_0 - q)e^{-\lambda T}$ 达到最大值, 为此关于 λ 求导而得:

$$(p_0 - q)(1 - \lambda T)e^{-\lambda T} = 0,$$

因此 $\lambda T = 1$ 时, p 在 $t = T$ 时的变化速度达到最大, 从而压强为:

$$p_1 = P(T) = q + (p_0 - q)e^{-1}.$$

这就是说,在设计时间为 T 的发信装置时,宜于选取毛细管使 $\lambda = \frac{1}{T}$,从而发信压强近似为:

$$p_1 = 0.632q + 0.368p_0,$$

气动计时装置在由气动器件组成的控制仪表中有广泛应用,这里只是谈谈设计时的基本原理.

例 1.2.5 导弹的导引规律.

在导弹的制导过程中,把导弹从某初始位置按照确定的准则引导至空中某位置是首先要考虑的问题.常见的古典导引方法有以下几种.

(1) 追踪法. 设一飞机 P 按直线飞行. 地面上发射一枚导弹 M 去拦截这架飞机. 假设飞机和导弹的速度都是常数,且它们的运动都发生在同一平面内,导弹的速度永远指向飞机的位置. 下面求飞机与导弹的相对运动规律.

令 r 表示飞机和导弹之间的瞬时距离, ϕ 表示飞机的速度矢量和导弹质心与飞机质心连线的夹角, v_M 表示导弹速度, v_p 表示飞机速度, $v_p = |\mathbf{v}_p|$, $v_M = |\mathbf{v}_M|$, 下面这个方程组表示导弹追赶飞机的一种运动规律:

$$\begin{cases} r' = v_p \cos \phi - v_m, \\ r\phi' = -v_p \sin \phi, \end{cases} \quad (1.2.28)$$

(2) 平行接近法. 设用导弹 M 去拦截空中一按直线飞行的目标 T . 导弹和飞机的速度都是常数,并且它们的运动都在同一平面内发生. 这样控制导弹,使视线在空间中保持固定方向. 下面求导弹拦截目标的运动规律.

令 γ_M 表示导弹指向与视线之间的夹角, γ_T 表示目标指向与视线之间的夹角.

由于视线方向保持固定,所以 $\phi' = 0$. 导弹和目标的相对速度在视线方向和垂直于视线方向的投影分别为:

$$\begin{cases} r' = v_T \cos \gamma_T - v_m \cos \gamma_M, \\ 0 = v_T \sin \gamma_T - v_m \sin \gamma_M, \end{cases} \quad (1.2.29)$$

其中, v_M 表示导弹速度, v_T 表示目标的速度, $v_T = |\mathbf{v}_T|$, $v_M = |\mathbf{v}_M|$.

关系式(1.2.29)表示的微分方程组就是导弹拦截目标的又一种运动规律,称为平行接近法.

(3) 比例导引法. 设导弹 M 拦截空中目标 T . 要求导弹指向的变化率和导弹目标连线与目标速度矢量的夹角 ϕ 的变化率成正比. 下面求导弹拦截目标的运动规律.

假设导弹和目标的运动条件和上面(2)相同,另 ϕ_M 是导弹的指向角. 有如下方程组:

$$\begin{cases} r' = v_T \cos \phi - v_m \cos(\phi - \phi_M), \\ r\phi' = -v_T \sin \phi + v_m \sin(\phi - \phi_M), \\ \phi'_M = \alpha \phi', \end{cases} \quad (1.2.30)$$

其中, α 为比例系数. 这个方程组描述了导弹追赶目标的另一种运动规律,称为比例导引法.

注意到: $\phi_M = \alpha\phi + \phi_0$, 所以当 $\alpha = 1$, $\phi_0 = 0$ 时,有 $\phi_M = \phi$. 这时微分方程(1.2.30)就是微分方程(1.2.28),即这时比例导引法就是追踪法;当 $\alpha = 1$, $\phi' = 0$ 时有 $\phi_M = \text{常数}$. 这种情况下,微分方程(1.2.30)就是微分方程(1.2.29),即这时比例导引法就是平行接近导引法.

例 1.2.6 稀释问题.

一容器最初有 v_0 升盐水溶液,其中含盐 a 千克. 每升含 b 千克盐的水溶液以 e 升每分钟

的速度注入,同时,搅拌均匀的溶液以 f 升每分钟速度流出. 那么在任意时刻 t ,容器中的含盐量如何表达?

设 Q 为在任意时刻容器中的含盐量(单位是千克). Q 的变化率 $\frac{dQ}{dt}$,等于盐的注入率减去流出率. 盐的注入率是 be 千克每分钟,要决定流出率,我们先计算在任意时刻 t ,容器中溶液的体积,它等于最初的体积 v_0 加上注入的体积 et 再减去流出体积 ft . 于是,在任意时刻,盐水的体积是

$$v_0 + et - ft,$$

在任意时刻盐的浓度是 $\frac{Q}{v_0 + et - ft}$,由此得盐的流出率是

$$f\left(\frac{Q}{v_0 + et - ft}\right)\text{千克/分},$$

于是有稀释问题的微分方程为:

$$\frac{dQ}{dt} = be - f\left(\frac{Q}{v_0 + et - ft}\right),$$

或

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{v_0 + et - ft}Q = be.$$

例 1.2.7 农场主技术革新的推广.

长期以来,经济学家和社会学家们一直关注着如何在行业中推广技术改造或革新. 一旦一家企业采用了一项革新,那么,该行业中其他企业将以怎样的速度接受这项革新? 本例构造一个农场主推广技术革新的微分模型.

我们假设在 $t=0$ 时,一项新的革新被介绍到一个确定的拥有 N 个农场主的社会里. 设 $p(t)$ 表示 t 时刻采纳该项革新的农场主的数量. 尽管 $p(t)$ 是整数变化的,但是把它视为时间的连续函数. 同时,关于革新的推广,我们可以做一种最简单的实际假设:对于一位尚未采纳某项革新的农场主来说,只有当一位已经采用了这项革新的农场主对他谈论了这项革新之后,他才可能会采纳它. 于是,在很短时间 Δt 内采纳这项革新的农场主数 Δp 与在此之前已经采纳了这项革新的农场主数 p 及还不知道这项革新的农场主数 $N-p$ 成正比. 因此,对某个正常数 c ,有

$$\Delta p = cp(N-p)\Delta t,$$

或

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = cp(N-p),$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$,得微分方程

$$\frac{dp}{dt} = cp(N-p). \quad (1.2.31)$$

事实上,我们假设一个农场主仅仅是通过与别的农场主接触才学会了一项新事物是过于简单的,也不符实际. 研究表明,大量的通信宣传工具在采纳过程的前期阶段起了很大的作用. 所以,我们需要在方程(1.2.31)中加上一项,从而把这个因素考虑进去. 为计算这一项,我们假设在一个短时间 Δt 内,通过大众通信宣传工具学会某种新事物的农场主数 Δp 与还不知道这种新事物的农场主成比例,即对某个正常数 c'

$$\Delta p = c'(N-p)\Delta t.$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 我们看到, 单位时间内有 $c'(N-p)$ 个农场主通过大众通信宣传工具学会这种新事物. 得到微分方程:

$$\frac{dp}{dt} = cp(N-p) + c'(N-p). \quad (1.2.32)$$

在 20 世纪初, 一些主要的技术革新在煤炭、钢铁、酿造及铁路等不同行业中被采纳的速率也受微分方程(1.2.31)的控制.

例 1.2.8 市场价格形成的动态过程.

如果不考虑商品的价格形成的动态过程, 那么商品的市场价格应该能保证市场供需的平衡. 作为一个最一般、最简单的经济规律来说, 使得商品的供给与需求相即等均衡的价格成为(静态)均衡价格.

一般地说, 实际的市场价格不会恰好等于均衡价格, 而且价格也不会是静态的, 而应该是时间 t 的函数. 价格形成的过程往往是一个通过市场的不断地自动调节而使市场价格逐步趋于均衡价格的过程. 具体地说, 假设在某一时刻 t_0 , 有一非均衡价格 P_0 , 那么此时存在(正的或负的)供需差. 此供需差则促使价格变动. 对新形成的价格又有新的供需差. 如此不断调节, 就构成市场价格形成的动态过程. 现就以上描述的价格形成过程建立动态的常微分方程数学模型.

上述问题是数理经济学中研究的基本问题. 它不能像物理中那样精确地建立模型, 然后求得微分方程模型的解, 去准确地反映或预见一些物理现象. 对经济学中的问题, 我们只能近似地建立数学模型, 提出一些对规律的分析与假想, 以建立模型这个动态过程的微分方程, 然后求得方程的解, 再将理论的结果与实际的动态情况比较, 以决定近似模型的好坏并决定是否采纳.

这时几个要素为: 自变量取时间 t , 未知函数取商品价格 P . 现做一种简单的模拟近似, 即认为价格的变化正比于需求与供给之差. 例如, 对一种商品的情形, 有方程:

$$\frac{dP}{dt} = a[f(P, r) - g(P)]. \quad (1.2.33)$$

其中, a 为正常数, r 为消费者的收入, $f(P, r)$ 为已知的需求函数, $g(P)$ 为已知的供给函数, 显然方程(1.2.33)是一阶非线性常微分方程:

如果需求函数及供给函数为线性的, 则方程(1.2.33)变为:

$$\frac{dP}{dt} = a(-aP + b - cP + d) = -a(a+c)P + a(b+d). \quad (1.2.34)$$

显然, 此时方程(1.2.34)为一阶线性常系数常微分方程. 对方程(1.2.34)的求解和市场价格形成的动态数学模型的分析将在后面章节中给出.

习题

1. 试分别求出方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2 - 1}$ 过点(0,1)及过点(2,1)的积分曲线.

2. 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求这曲线所适合的微分方程.

3. 设一个化工厂每立方米的废水中含有 3.08kg 盐酸, 这些废水经过一条河流流入一个湖泊中, 废水流入湖泊的速率为 $20\text{m}^3/\text{h}$. 开始时湖中有水 4000000m^3 , 河流中流入湖泊的不含盐酸的水是 $1000\text{m}^3/\text{h}$, 湖泊中混合均匀的水流出的速率是 $1000\text{m}^3/\text{h}$. 试建立微分方程以计算该厂排污开始 t 小时后湖泊中盐酸的含量.

4. 实验表明人体吸收葡萄糖的速率与血液中葡萄糖的含量成一定比例. 设葡萄糖以常数速率通过静脉注射入一位病人体内, 试建立分析该病人血液中葡萄糖含量变化的微分方程. 假设开始时病人体内葡萄糖的含量为 G_0 , 且病人无法通过其他途径补充葡萄糖.

5. 一个质量为 m 的质点在水中由静止开始下称, 设下沉时水的阻力与其速度成正比, 试求质点运动规律所满足的微分方程及初始条件.

6. 长为 6 米、单位长度质量为 P 的链自桌上滑下, 运动时, 链子桌上垂下部分有 1 米长, 试求下滑的长度与时间 t 的关系(不计摩擦力).

7. 考虑一物质 A 经过化学反应, 全部生成另一种物质 B, 设 A 的初始质量为 10 千克, 在一小时内生成 B 物质 3 千克, 试求 B 物质的质量所满足的微分方程.

8. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成比例, 如果物体在 20 分钟内由 100°C 冷至 60°C , 那么在多久的时间内, 这个物体的温度达到 30°C , 假设空气的温度为 20°C .

9. 当一个新的耐用消费品进入市场时, 厂家和销售商家的广告及购买此产品人员的信息对产品的销售有积极作用. 记 K 为一地区潜在的消费者总数, $x(t)$ 为时刻买了此产品的顾客. 提出适当的假设, 试建立微分方程描述购买者数量随时间变化的关系.

10. 某一地区共有 5000 只老鼠, 开始时发现有 5 只老鼠得了一种非传染病. 该传染病在老鼠间传播的速率与得病老鼠和未得病老鼠数量之积成正比, 试建立描述得病老鼠数量与时间变化关系的微分方程.

11. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

- (1) 曲线上任意一点的切线与该店的向径夹角为零;
- (2) 曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l ;
- (3) 曲线上任意一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2 ;
- (4) 曲线上任意一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分;
- (5) 曲线上任意一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;
- (6) 曲线上任意一点的切线纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;
- (7) 曲线上任意一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

(提示: 过点 (x, y) 的切线的横截距和纵截距分别为 $x - \frac{y}{y'}$ 和 $y - x y'$.)

1.3 解的存在性与唯一性

微分方程来源于实际问题, 求解微分方程的目的就是为了得到某一变化过程中变量的变化规律. 因此当一个实际问题所满足的方程建立之后, 我们所关心的是该微分方程有没有解和有多少解? 例如微分方程 $y' = 2x$ 有无限多个解 $y = x^2 + c$, 而对这个方程再加以初始条件 $y(x_0) = y_0$ 后就有唯一的解 $y = x^2 + y_0 - x_0^2$. 因此可以看出对于微分方程的求解的前提是其解的存在性和具备某定解条件时解的唯一性. 从实际问题来看, 我们建立的模型必须保证方程初值问题有解并且唯一. 因为, 一方面, 在数值计算中, 若解不存在, 却去求数值解, 当然荒唐; 即使解存在, 但解不一定唯一, 也就不知和哪个解近似. 另一方面, 解的存在唯一性的确定能够鉴定我们用以描述客观过程时所采用的假设是彼此不相矛盾的, 否则, 就表明我们所建立的方程与定解条件对客观现实有过分的歪曲, 数学模型必须进一步修正. 通常把本节解的存在唯一性与下面几节解对初值的连续依赖性及可微性一起称为微分方程的适定性问题

(well-posed problem).

本节先考察如下微分方程初值问题解的存在唯一性:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.3.35)$$

初值条件:

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.3.36)$$

微分方程初值问题的解是在某一区间上存在的, 如初值问题:

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1,$$

的解是 $y = \frac{1}{1-x}$, 它在 $(-\infty, 1)$ 上存在. 而同一方程满足初始条件 $y(1) = -2$ 的解为 $y =$

$\frac{2}{1-2x}$, 它的存在区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 初值问题:

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = a, \quad (a > 0)$$

的解为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 存在区间为 $(-a, a)$. 而满足初始条件 $y(0) = 0$ 的初值问题:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{2y}{x^3}, & x \neq 0, \end{cases}$$

的解有无穷多个, 均在 $(-\infty, +\infty)$ 存在, 它们是:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ c_2 e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0, \end{cases}$$

对一般方程的初值问题, 不可能通过求出其解的方法来说明它有唯一的解或多个解, 因为有可能由于我们的方法的限制或技巧不高等原因, 没有求出解的表达式. 因此, 我们需要一个从微分方程右端函数 $f(x, y)$ 来判断初值问题的解存在唯一的方法, 即不直接求方程的解, 而是采用构造性的方法从理论上论证解的存在唯一性.

设 $f(t, x)$ 在矩形区域:

$$R: t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \quad x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$$

连续. 如果有常数 $L > 0$, 使得对于 R 上任何两点 (t_1, x_1) 和 (t_2, x_2) 都有如下不等式成立:

$$|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

则称 $f(t, x)$ 在 R 关于 x 满足李普希兹 (Lipschitz) 条件, L 称为 Lipschitz 常数.

定理 1.3.1 (Peano 存在性定理) 如果方程 (1.3.35) 的右端函数 $f(t, x)$ 在闭矩形域 $R: t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$ 上连续, 则初值问题式 (1.3.35) 和式 (1.3.36) 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上至少存在一个解, 其中:

$$h_0 = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(t, x) \in R} |f(t, x)|.$$

定理证明在本节最后给出.

定理 1.3.2 (Picard 存在唯一性定理) 如果方程 (1.3.35) 的右端函数 $f(t, x)$ 在闭矩形域 R 上连续而且关于 x 满足李普希兹 (Lipschitz) 条件, 则初值问题式 (1.3.35) 和式 (1.3.36) 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上存在唯一解 $x = \varphi(t)$, $\varphi(t_0) = x_0$. 其中

$$h_0 = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(t,x) \in R} |f(t,x)|.$$

证: 求初值问题式(1.3.35)和式(1.3.36)的解 $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$, 等价于求如下积分方程:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x) ds, \quad (1.3.37)$$

在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上的连续解.

(1) 解的存在性.

下面我们用毕卡(Picard)逐次逼近法来简证关于积分方程(1.3.37)连续解的存在性, 可分三步进行.

首先, 构造逐次逼近序列

任取一个满足初始条件的 $x(t_0) = x_0$ 的函数 $x = \varphi_0(t)$ 且此函数图像当 $t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 时不超出 R . 不妨就取 $\varphi_0(t) \equiv x_0$, 将它代入方程(1.3.37)的右端, 所得函数 $x(t)$ 用 $\varphi_1(t)$ 表示, 称之为方程解的一次近似, 即:

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds,$$

再将 $\varphi_1(t)$ 代入方程的右端即得解的二次近似 $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds,$$

循此顺序可以得到 n 次近似:

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds, \quad (1.3.38)$$

我们用数学归纳法证明当 $|t - t_0| \leq h_0$ 时, 有 $|\varphi_n(t) - x_0| \leq b$, ($n = 1, 2, \dots$), 即曲线 $x = \varphi_n(t)$ 在 R 之中.

已知 $\varphi_0(t) \equiv x_0$ 的图像不超出闭矩形域 R , 假定 $\varphi_{n-1}(t)$ 的图像也不超出闭矩形域 R , 即当 $t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 时有 $|\varphi_{n-1}(t) - x_0| \leq b$, 由式(1.3.38)有:

$$\varphi_n(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds.$$

从而得:

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_{n-1}(s))| ds \right|,$$

因为已假设当 $|t - t_0| \leq h_0$ 时, 有 $|\varphi_{n-1}(t) - x_0| \leq b$, 所以根据定理中函数 $f(t, x)$ 的连续性 & 有界性可得:

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq M \left| \int_{t_0}^t ds \right| = M |t - t_0| \leq M h_0 \leq b,$$

这样, 我们在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上通过逐次逼近得到了一个连续函数列:

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots \quad (1.3.39)$$

其次, 证明近似序列(1.3.39)在 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上一致收敛.

考虑函数项级数

$$\varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + \dots + [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] + \dots, \quad (1.3.40)$$

其部分和

$$S_{n+1} = \varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + \dots + [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] = \varphi_n(t),$$

因此, 只需证明级数收敛即可表明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t)$ 存在. 我们容易得到:

$$\varphi_1(t) - \varphi_0(t) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds,$$

所以

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds \right| \leq M |t - t_0|,$$

由一次近似和二次近似的定义, 并注意到李普希兹条件可得:

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_0(s))] ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \right| \\ &\leq ML \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| \\ &= ML \frac{|t - t_0|^2}{2}, \end{aligned}$$

类似, 可得:

$$\begin{aligned} |\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))] ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \right| \\ &\leq ML^2 \left| \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^2}{2} ds \right| \\ &= ML^2 \frac{|t - t_0|^3}{3!}, \end{aligned}$$

从而我们设下标为 n 时成立类似不等式, 则:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \quad (1.3.41)$$

则在下标为 $n+1$ 时, 此类不等式也成立, 事实上借助不等式(1.3.41)可得:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))] ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| ds \right| \\ &\leq ML^n \left| \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^n}{n!} ds \right| \\ &= ML^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

所以由上述归纳假设可知不等式(1.3.41)事实上对任意的 n 都成立.

注意到 $|t - t_0| \leq h_0$, 易知级数从第二项开始, 每一项绝对值都小于正项级数:

$$h_0 + Mh_0 + ML \frac{h_0^2}{2} + \cdots + ML^{n-1} \frac{h_0^n}{n!} + \cdots$$

的对应项, 而这个正项级数是收敛的, 所以由级数判别法可知, 函数项级数(1.3.40)是一致收

敛的. 设其和式为 $\varphi(t)$, 从而近似序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$. 又因为此函数列每一项都是连续函数, 所以 $\varphi(t)$ 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上也是连续函数.

再次, 证明所得的极限函数 $\varphi(t)$ 是积分方程 (1.3.37) 的解.

对 $\forall \epsilon > 0$, 因为 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$, 所以存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时, 对 $\forall t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 都有:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{Lh_0},$$

进而有:

$$\max_{t_0 - h_0 \leq t \leq t_0 + h_0} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\epsilon}{Lh_0}.$$

于是, 再利用李普希兹条件得:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))] ds \right| &\leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi_n(s) - \varphi(s)| ds \right| \\ &\leq Lh_0 \max_{t_0 - h_0 \leq t \leq t_0 + h_0} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

即得:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

于是, 我们可以对恒等式 (1.3.38) 两边取极限得到:

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

此即表明 $\varphi(t)$ 是方程 (1.3.37) 的解, 从而也就是微分方程 (1.3.35) 和方程 (1.3.36) 的解. 最后, 在下文中证明唯一性.

(2) 解的唯一性.

(反证法) 假设满足方程 (1.3.35) 及其初值 (1.3.36) 的解有两个不同的解 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$, 它们都满足初值 (1.3.36), 即 $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$. 不失一般性设在 $[t_0, t_0 + h_0]$ 上存在一点 t^* 满足 $\varphi(t^*) \neq \psi(t^*)$, 不妨设 $\varphi(t^*) < \psi(t^*)$. 于是由连续性知存在 $t_1 \in [t_0, t^*)$, 有 $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = x_1$ 但当 $t \in [t_1, t^*]$ 时恒有 $\varphi(t) < \psi(t)$ 成立. 因为当 $t \in [t_1, t^*]$ 时有:

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \psi(s)) ds,$$

上边两式做差得:

$$\varphi(t) - \psi(t) \equiv \int_{t_1}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds,$$

则对任意的 $\sigma > 0, t_1 \leq t \leq t_1 + \sigma \leq t^*$, 记 $I = [t_1, t_1 + \sigma]$, 有:

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \max_{t \in I} |\varphi(t) - \psi(t)| \\ &\leq \max_{t \in I} \left| \int_{t_1}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_1}^t \widetilde{M} ds \right| \\ &\leq L \widetilde{M} \sigma, \end{aligned}$$

显然 $\tilde{M} > 0$, 所以由上式得 $1 \leq L\sigma$. 但是, L 是已知固定常数, σ 是可以任意小的, 这导致矛盾. 这说明在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上方程 (1.3.37) 的解是唯一的, 即微分方程初值问题 (见式 (1.3.35) 和式 (1.3.36)) 的解是唯一的.

关于定理的几点说明.

① 在实际运用此定理时, 李普希兹条件不容易验证, 而是验证一个更强的条件: 如果函数 $f(t, x)$ 在闭矩形域 R 上关于 x 的偏导数 $f'_x(t, x)$ 存在并且有界, 即存在正常数 L 使得对任意点 $(t, x) \in R$ 都满足 $|f'_x(t, x)| \leq L$.

② 毕卡逐次逼近法实际上也给出了一种求近似解的方法. 我们考察一下 n 次近似解 $\varphi_n(t)$ 与精确解 $\varphi(t)$ 间的误差估计. 事实上, 有:

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(Lh_0)^k}{k!} < \frac{M}{L} \frac{(Lh_0)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lh_0)^k}{k!} \\ &= \frac{M}{L} \frac{(Lh_0)^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh_0}. \end{aligned}$$

③ 如果方程 (1.3.35) 是线性方程, 即:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t), \quad (1.3.42)$$

其中, $p(t)$ 和 $q(t)$ 都是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 则对任意初值 (t_0, x_0) , $t_0 \in [\alpha, \beta]$, 方程 (1.3.42) 满足 $x(t_0) = x_0$ 的解在整个区间上都有定义且唯一. 事实上, 此时不难验证李普希兹条件满足, 并且我们总可以方便地延拓 $p(t)$, $q(t)$ 和选取相应于 Picard 定理中的 a 及充分大的 b , 使得 $[\alpha, \beta] \subseteq [t_0 - a, t_0 + a]$ 与不等式 $\frac{b}{M} \leq a$ 满足, 其中 M 的定义与定理 Picard 中的相同, 这样由定理 Picard 即得结论.

④ 从两个定理可知右端函数 $f(t, x)$ 只要连续就能保证微分方程初值问题解的存在性. 然而连续条件不能保证初值问题解的唯一性, 为了保证唯一性, 我们通常要求李普希兹条件, 但这个条件并不是唯一性的必要条件 (事实上李普希兹条件相当于要求 $f(t, x)$ 是关于自变量 x 的次线性函数, 这并非是一个足够弱的条件). 唯一性问题现在仍是一个研究的课题.

思考题 在定理中为何解的存在区间限制为 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 而不是 $[t_0 - a, t_0 + a]$?

附 Peano 定理及微分方程 (1.3.35) 和方程 (1.3.36) 与相应积分方程等价的证明.

如果方程 (1.3.35) 的右端函数 $f(t, x)$ 在闭矩形域 $R: t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$ 上连续, 则初值问题 (见式 (1.3.35) 和式 (1.3.36)) 在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上至少存在一个解, 其中:

$$h_0 = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(t, x) \in R} |f(t, x)|.$$

证: 易知初值问题 (见式 (1.3.35) 和式 (1.3.36)) 的解 $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$, 等价于求如下积分方程:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x) ds,$$

在区间 $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$ 上的连续解.

事实上, 如果 $x = \varphi(t)$ 是初值问题的解即有恒等式:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv f(t, \varphi(t)), \varphi(t_0) = x_0. \quad (\widetilde{*})$$

对式 $(\widetilde{*})$ 从 t_0 到 t 积分就得到恒等式:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad (*)$$

此即说明 $x = \varphi(t)$ 是积分方程的解.

反之, 如果连续函数 $x = \varphi(t)$ 是积分方程的解, 即有上面 $(*)$ 式成立. 又 $f(t, \varphi(t))$ 是连续的, 所以从 $(*)$ 式知 $\varphi(t)$ 有连续导数. 对 $(*)$ 式两端微分即得 $(\widetilde{*})$ 成立, 这表明 $x = \varphi(t)$ 是初值问题的解.

记 $J = [t_0 - h_0, t_0 + h_0]$, 在定义在 J 上的连续函数全体组成的 Banach 空间 $C(J)$ 上考虑集合 $U = \{x(t) \mid |x(t) - x_0| \leq b\}$, 易知 U 是 $C(J)$ 中的有界闭凸集. 在 U 上定义映射 $\phi = T\varphi$ 为:

$$\phi(t) = T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

由 h 的取法知 $\phi(t) \in U$, 即 T 是由 U 到自身的算子, 并且由 $f(t, \varphi(t))$ 连续性知 T 还是连续算子. 此外, 易证 $\phi(t)$ 还有有界导函数, 从而得 TU 是 $C(J)$ 中的列紧集, 即 TU 中的任何无穷点列在 $C(J)$ 中有收敛子列. 于是, 由 Schauder 不动点原理, 算子 T 在集合 U 中至少存在一个不动点, 即存在 $\varphi(t) \in U$ 满足 $\varphi(t) = T\varphi(t)$, 也就是:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

这说明积分方程有解, 即微分方程初值问题至少有一个解, 定理得证.

习题

1. 试用逐次逼近法求方程:

$$\frac{dx}{dt} = t - x^2,$$

满足初值条件 $x(0) = 0$ 的近似解 $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$.

2. 试分析方程:

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}},$$

右端函数 $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ 在整个 tOx 平面上连续, 但是满足初值条件 $x(0) = 0$ 的解并不唯一.

3. 试证明方程:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln |x|, & x \neq 0, \end{cases}$$

经过平面 tOx 上任意一点的解都是唯一的, 但右端函数不满足李普希兹条件. (提示: 把平面上的点分三类进行讨论, 即 t 轴上半平面区域, t 下半平面区域及 t 轴.)

4. 试证明定理 1.3.2 中的 n 次近似解与精确解有如下误差估计式:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1},$$

并利用此估计式估计第 1 题中三次近似 $\varphi_3(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 和 $t = 1$ 时的误差.

1.4 解的延展与比较定理

在 1.3 节的定理中证明了微分方程初值问题 (1.3.35) 满足初值条件 (1.3.36) 的解的存在区间 $J = \{t: |t - t_0| \leq h_0\}$, 但一般来说该存在区间的“长度”是“很小”的. 然而, 方程的右端函数 $f(t, x)$ 有意义的存在区域 D 可能比闭矩形域 R 大得多. 因此人们自然要问: 对于微分方程 (1.3.35), 解的存在区间能否扩展? 能扩展到何处? 为此, 我们先看下边的例子.

例 1.4.1 试讨论微分方程.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2,$$

满足初始条件

$$x(0) = 0,$$

的解的存在区间.

显然 $x = \tan t$ 是上述问题的一个特解, 它的存在区间是开区间 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 尽管方程的定义区间为全平面.

如果运用定理 1.3.2 所用的逐次逼近法, 矩形 R :

$$|t| \leq a, \quad |x| \leq b,$$

那么

$$\max_{(t,x) \in R} |1 + x^2| = 1 + b^2,$$

从而

$$h = \min\left(a, \frac{b}{1 + b^2}\right).$$

但 $\frac{b}{1 + b^2} \leq \frac{1}{2}$, 当 $b = 1$ 时等号成立. 如果取 $a \geq \frac{1}{2}$, $b = 1$, 那么由上式只能得到 $h = \frac{1}{2}$, 即只能肯定解的存在区间是 $|t| \leq \frac{1}{2}$, 不能断定解在 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 内存在.

显然, 如果以 $\left(\frac{1}{2}, \tan \frac{1}{2}\right)$ 为初值, 利用定理 1.3.2 可以断定解的存在区间向右扩大了.

我们知道, 向右扩展解的存在区间不能超过 $\frac{\pi}{2}$. 同样, 向左也不能超过 $-\frac{\pi}{2}$.

下面就讨论初值问题 (见式 (1.3.35) 和式 (1.3.36)) 解的延展.

定理 1.4.1 (延展定理) 如果方程 (1.3.35) 右端函数 $f(t, x)$ 在 (有界或无界) 区域 D 上连续, 且关于 x 满足局部李普希兹条件, 则对于任意一点 $(t_0, x_0) \in D$, 方程的以 (t_0, x_0) 为初值的解均可以向左右延展, 直到 $(t, \varphi(t))$ 任意接近区域 D 的边界.

注意: “ $(t, \varphi(t))$ 任意接近区域 D 的边界”是指: 当有界时, 积分曲线向左右延展可以任意接近边界上的点, 当为无界时, 积分曲线向左右延展, 或者任意接近有限边界, 或者无限远离.

证: 首先, 证 D 有界的情形.

设 D 的边界为 $L = \bar{D} - D$ (\bar{D} 为 D 的闭包). 对任意小的 $\epsilon > 0$, 记 L 的 ϵ 开邻域为 U_ϵ . 于是, 集合 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^* = \bar{D} - \bar{U}_{\frac{\epsilon}{2}}$ 为一闭集. 易知 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^* \subset D$, 且 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 有界.

只要能证明曲线 $x = \varphi(t)$ 可以达到 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 的边界 $L_{\frac{\epsilon}{2}}$, 也就证明了 $x = \varphi(t)$ 可以任意接近 L 了. 事实上, 以 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 的任意一点为中心, 以 $\frac{\epsilon}{4}$ 为半径的闭圆域均在 D 之内, 且在闭域 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^* = \bar{D} - U_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 之内. 从而, 以 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 的任意一点为中心, 以 $\frac{\sqrt{2}\epsilon}{4}$ 为边长的正方形也应在 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 之内. 记 $M_1 = \max_{(t,x) \in D_{\frac{\epsilon}{2}}^*} |f(t,x)|$, 则过 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 的任意一点 (t^*, x^*) 的积分曲线必至少可在区间 $[t^* - h, t^* + h]$ 上

存在, 其中:

$$h = \min \left\{ \frac{\sqrt{2}}{8} \epsilon, \frac{\sqrt{2}}{8M_1} \epsilon \right\}.$$

于是, 过点 (t_0, x_0) 的积分曲线 $x = \varphi(t)$ 每向右或向左延展一次, 其存在区间就延长 h . 只要 $x = \varphi(t)$ 尚在 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 内就仍可向左及向右延展. 由于 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 有界, $x = \varphi(t)$ 经过有限次延展后, 一定可以达到 $D_{\frac{\epsilon}{2}}^*$ 的边界 $L_{\frac{\epsilon}{2}}$. 于是 D 有界情形得证.

其次, 证 D 无界的情形.

这时我们考虑 D 与闭圆域:

$$S_n: t^2 + x^2 \leq n^2, n = 1, 2, \dots,$$

的交集 $D_n = D \cap S_n$. D_n 的边界上的点或为 D 的边界点或为 S_n 圆周上的点. 同时有 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, 根据前面的论证, 过 D_n 内任意一点的积分曲线能够任意接近 D_n 的边界. 于是, 过 (t_0, x_0) 的积分曲线 $x = \varphi(t)$, 或者保持在某个圆域之内延展而无限接近 D 的边界, 或者可越出任意大的圆域 S_n 而无限远离. 定理证毕.

定理 1.4.2 设微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.4.43)$$

的右端函数 $f(t, x)$ 在条形区域

$$S: \alpha < t < \beta, \quad -\infty < x < +\infty,$$

内连续, 且满足不等式

$$|f(t, x)| \leq A(t) |x| + B(t), \quad (1.4.44)$$

其中, $A(t)$ 和 $B(t)$ 取非负值并且在区间 (α, β) 上连续, 则微分方程 (1.4.43) 的每一个解都以区间 (α, β) 为最大存在区间.

证: 设微分方程 (1.4.43) 满足初值条件 $x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in S$ 的一个解为 $\Gamma: x = x(t)$. 要证 Γ 的最大存在区间为 (α, β) , 先证它的右侧最大存在区间为 $[t_0, \beta)$. 假设不然. 令它的右侧最大存在区间为 $[t_0, \beta_0)$ 其中 β_0 是一个常数, $t_0 < \beta_0 < \beta$.

我们在 β_0 的两侧分别取常数 t_1 和 t_2 , 使得:

$$t_0 < t_1 < \beta_0 < t_2 < \beta,$$

而且

$$t_2 - t_1 < t_1 - t_0,$$

在有限闭区间 $[t_0, t_2]$ 上函数 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是连续有界的; 令 A_0 和 B_0 分别是它们正的上界, 再

利用不等式(1.4.44), 我们得到:

$$|f(t, x)| \leq A_0 |x| + B_0, \quad t_0 < t < t_2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.4.45)$$

而且不妨设正数:

$$a_1 = t_2 - t_1 < \frac{1}{4A_0}.$$

因为 $x = x(t)$ 在 $[t_0, \beta_0)$ 上存在, 所以有:

$$x(t_1) = x_1, (t_1, x_1) \in S,$$

现在, 以点 (t_1, x_1) 为中心做一矩形域:

$$R_1: |t - t_1| \leq a_1, |x - x_1| \leq b_1,$$

其中正数 b_1 是充分大的. 显然 R_1 是条形域 S 内的一个有限闭区域. 由不等式(1.4.45)容易推出不等式:

$$|f(t, x)| \leq A_0(|x_1| + b_1) + B_0, (t, x) \in R_1, \quad (1.4.46)$$

成立.

令

$$M_1 = A_0(|x_1| + b_1) + B_0 + 1, \quad h_1 = \min\left\{a_1, \frac{b_1}{M_1}\right\},$$

并以点 (t_1, x_1) 为中心做矩形区域:

$$R_1^*: |t - t_1| \leq h_1, \quad |x - x_1| \leq b_1,$$

则 $R_1^* \subseteq R_1$. 我们在 R_1^* 内可以应用定理 1.4.1 推出, 微分方程(1.4.43)过 (t_1, x_1) 的解 Γ 必可向右延伸到 R_1^* 的边界. 另外, 从不等式(1.4.46)可知解 Γ 在 R_1^* 内必停留在扇形区域:

$$|x - x_1| \leq M_1 |t - t_1|,$$

因此, 解 Γ 可以向右延伸到跨过区间 $[t_0, t_1 + h_1)$. 因为 $a_1 < \frac{1}{4A_0}$, 以及极限 $\lim_{b_1 \rightarrow +\infty} \frac{b_1}{M_1} = \frac{1}{A_0}$, 所以只要取充分大的正数 b_1 , 就有 $h_1 = a_1 = t_2 - t_1$.

由此推出 Γ 在区间 $[t_0, t_2)$ 上存在. 但是, 区间 $[t_0, t_2)$ 严格大于 Γ 的右侧最大存在区间 $[t_0, \beta_0)$ 这是一个矛盾, 它证明了 Γ 的右侧最大存在区间必定是 $[t_0, \beta)$.

同样可证 Γ 的左侧最大存在区间必定是 $(\alpha, t_0]$. 因此 Γ 的最大存在区间是 (α, β) . 定理证毕.

例 1.4.2 试讨论方程 $\frac{dx}{dt} = x^2$ 通过点 $(1, 1)$ 的解和通过点 $(3, -1)$ 的解之存在区间.

解: 此时区域 D 是整个平面. 方程右端函数满足延展定理所要求的条件. 容易算出, 方程的通解是 $x = \frac{1}{c-t}$, 故通过点 $(1, 1)$ 的积分曲线为:

$$x = \frac{1}{2-t},$$

它向左可无限延展, 而当 $t \rightarrow 2^-$ 时, $x \rightarrow +\infty$. 所以, 其存在区间为 $(-\infty, 2)$.

通过点 $(3, -1)$ 的积分曲线为

$$x = \frac{1}{2-t},$$

它向左不能无限延展, 因为当 $t \rightarrow 2^+$ 时, $x \rightarrow -\infty$; 所以其存在区间为 $(2, +\infty)$.

顺便指出: 这个方程只有解 $x=0$ 可以向左右两个方向无限延展.

这个例子说明, 尽管 $f(t, x)$ 在整个平面满足延展定理条件, 解上的点能任意接近区域 D 的边界, 但方程解的定义区间不能延展到整个数轴上去.

解的延展定理在微分方程理论研究中是一个常用的定理. 再看下面的例子.

例 1.4.3 考虑方程:

$$\frac{dx}{dt} = (x^2 - a^2)f(t, x), \quad (1.4.47)$$

假设 $f(t, x)$ 及 $f'_x(t, x)$ 在 tOx 平面上连续. 试证明: 对于任意 t_0 及 $|x_0| < a$, 方程 (1.4.47) 满足 $x(t_0) = x_0$ 的解都在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

证: 根据假设, 可证明方程 (1.4.47) 右端函数在整个 tOx 平面上满足解的存在与唯一性定理和解的延展定理的条件. 容易看出 $x = \pm a$ 是方程 (1.4.47) 在 $(-\infty, \infty)$ 上的解. 由延展定理可知, 满足 $x(t_0) = x_0$, $|x_0| < a$, (t_0 任意) 的解 $x = x(t)$ 上的点应当无限远离原点. 但是, 由解的唯一性, $x = x(t)$ 又不能穿过直线 $x = \pm a$, 故只能向两侧延展而无限远离原点, 即只能夹在两条直线 $x = a$ 和 $x = -a$ 之间向 t 轴的两个方向无限延伸.

在解决问题时, 我们经常将延展定理与比较定理配合使用. 考虑方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.4.48)$$

与方程:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (1.4.49)$$

则有如下比较定理.

定理 1.4.3 (第一比较定理) 设函数 $f(t, x)$ 与 $F(t, x)$ 定义在某个区域 D 上满足存在与唯一性定理的条件, 并且在 D 上有不等式 $f(t, x) < F(t, x)$ 成立, 则方程 (1.4.48) 满足初值条件 $\varphi(t_0) = x_0$ 的解 $\varphi(t)$ 和方程 (1.4.49) 的满足初值条件 $\phi(t_0) = x_0$ 的解 $\phi(t)$ 在它们共同存在的区间上满足如下不等式:

$$\begin{cases} \varphi(t) < \phi(t), & t > t_0, \\ \varphi(t) > \phi(t), & t < t_0, \end{cases}$$

证: 由题设条件, 我们知方程 (1.4.48) 与方程 (1.4.49) 满足初值 $x(t_0) = x_0$ 的解都在 x_0 某邻域内存在且唯一, 它们都满足 $\varphi(t_0) = \Phi(t_0) = x_0$.

现在, 讨论函数 $z(t) = \Phi(t) - \varphi(t)$. 因为 $z(t_0) = 0$,

$$z'(t_0) = \Phi'(t_0) - \varphi'(t_0) = F(t_0, x_0) - f(t_0, x_0),$$

所以, 函数 $z(t)$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上连续, 从而如果不等式 $z(t) > 0$ 不是对所有 $t > t_0$ 成立, 则至少存在一点 $t_1 \in (t_0, t_0 + h]$ 使得 $z(t_1) = 0$, 同时, 当 $t \in (t_0, t_1)$ 时, $z(t) > 0$. 因此在点 t_1 应有:

$$z'(t_1) = \Phi'(t_1) - \varphi'(t_1) = F(t_1, x_1) - f(t_1, x_1) \leq 0,$$

但这是不可能的. 因为 $\Phi(t_1) = \varphi(t_1)$, 而按假设应有 $F(t_1, x_1) - f(t_1, x_1) > 0$ 矛盾. 因此, $z(t)$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上恒为正, 即 $\Phi(t) > \varphi(t)$. 当 $t < t_0$ 时的部分可类似证明. 定理证毕.

例 1.4.4 试证明对任意 $(t_0, x_0) \in R^2$, 方程:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{t^2 + x^2 + 1},$$

满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解都在 $(-\infty, +\infty)$ 存在.

证: 函数 $\frac{t^2}{t^2 + x^2 + 1}$ 在整个平面上满足存在唯一性定理条件, 且

$$0 \leq \frac{t^2}{t^2 + x^2 + 1} \leq 1,$$

将原方程与方程:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{dx}{dt} = 1,$$

比较, 故原方程满足 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 在其共存区间上满足:

$$x_0 \leq x(t) \leq x_0 + (t - t_0), \quad t > t_0,$$

$$x_0 + (t - t_0) \leq x(t) \leq x_0, \quad t < t_0.$$

由延展定理, 积分曲线 $x = x(t)$ 可以无限远离原点, 故 $x(t)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

习题

1. 试证明: 对任意的 t_0 及满足条件 $0 < x_0 < 1$ 的 x_0 , 方程:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(x-1)}{1+t^2+x^2},$$

的满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

2. 指出方程:

$$\frac{dx}{dt} = (1-x^2)e^{tx^2},$$

的每一个解的最大存在区间, 以及当 x 趋于区间的两端点时解的性状.

3. 设 $f(t, x)$ 在整个平面上连续有界, 且 $f'_x(t, x)$ 也存在连续, 试证明方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

的任意解 $x = \varphi(t)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义.

4. 讨论方程:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{2},$$

经过点 $(0, 0)$ 的解, 以及通过点 $(\ln 2, -3)$ 的解的最大存在区间.

1.5 解对初值的连续依赖性

在大多数实际应用中, 我们常常希望系统具有一定的稳定性, 即当系统的初始状态发生小的扰动后, 系统的状态在一段时间内变化也不大. 一个系统是否稳定常常是判断此系统好坏的关键指标之一. 例如人类的大脑, 无论学习生活知识还是课本知识, 都能保证学习正常进行下去, 而不会因为学习内容不同而使学习不能进行, 这说明人类的大脑对学习具有稳定性. 人类模拟大脑特性而建立起来的人工神经网络系统在大多数应用中就必须保证这种稳定性, 否则很多人工神经网络的应用就不能进行. 再譬如, 有些人在选择爱情的对象时, 不会认为对方具有某个小缺点而拒绝交往, 而是长时间的考察对方特点; 有些人都会因某个细节而停止交往, 这时我们常认为前者的情感判别系统是稳定的, 认为是优的, 而后者是不可

取的. 这种对初始状态(印象输入)发生小的变化后在一段有限时间内系统仍保持稳定的特性, 用微分方程的语言来说就是解(表示系统的状态)对初值(表示初始状态或初始输入)的连续依赖, 若在连续的无限时间内系统都保持稳定, 则称之为微分方程的解稳定.

从另一角度来说, 很多自然现象的研究都可以归结为求某些微分方程满足其初值的解. 但是这些初值都是用实验来测定的, 因此所得的数据总会有误差. 我们大多数情况下希望当测定的初始数据有微小的误差时不会在有限时段内引起解的巨大变化, 这种现实中的要求就是解对初值连续依赖性.

下面对上述问题给出数学上的确切定义.

定义 1.5.1 设初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t^*) = x^*, \end{cases}$$

的解 $x = \varphi(t, t^*, x^*)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta(\epsilon, t^*, x^*) > 0$, 使得对于满足 $|t_0 - t^*| \leq \delta$, $|x_0 - x^*| \leq \delta$ 的任意 (t_0, x_0) , 初值问题(1.3.35)和式(1.3.36)的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 也在 $[a, b]$ 上有定义, 且有:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t^*, x^*)| < \epsilon, \quad t \in [a, b],$$

则称初值问题(见式(1.3.35)和式(1.3.36))的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 在点 (t^*, x^*) 连续依赖于初值 (t_0, x_0) .

引理 1.5.1 (Bellman 引理) 设 $x(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上非负连续函数, $t_0 \in [a, b]$, 若存在常数 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 有如下不等式成立:

$$x(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t x(s) ds \right|, \quad t \in [a, b], \quad (1.5.50)$$

则满足如下不等式估计:

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}.$$

此引理证明将在本节最后给出.

定理 1.5.1 (解对初值的连续依赖) 设函数 $f(t, x)$ 在开区域 D 内连续, 且关于 x 满足李普希兹条件. 如果 $(t^*, x^*) \in D$, 初值问题(见式(1.3.35)和式(1.3.36))有解 $x = \varphi(t, t^*, x^*)$, 且当 $t \in [a, b]$ 时, $(t, \varphi(t, t^*, x^*)) \in D$, 则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $|t_0 - t^*| \leq \delta$, $|x_0 - x^*| \leq \delta$ 的任意 $(t_0, x_0) \in D$, 初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 也在 $[a, b]$ 上有定义, 且有:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t^*, x^*)| < \epsilon.$$

证: 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 选取 $0 < \delta_1 < \epsilon$, 使得闭区域 $U = \{(t, x) \mid t \in [a, b], |x - \varphi(t, t^*, x^*)| \leq \delta_1\}$ 整个包含在 D 内, 即 $U \subset D$. 选取 δ 满足:

$$0 < \delta < \frac{\delta_1}{1 + M} e^{-L(b-a)},$$

其中, L 是李普希兹常数, $M = \max_{(t, x) \in U} |f(t, x)|$, 同时, 还要保证闭正方形 $R = \{(t, x) \mid |t - t^*| \leq \delta, |x - x^*| \leq \delta\}$ 含有带形区域 U 的内部.

由存在唯一性定理知, 对任意 $(t_0, x_0) \in R$, 在 t_0 的某邻域上存在唯一的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, 且在 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 尚有定义的区间上有:

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0)) d\tau.$$

另外, 有:

$$\varphi(t, t^*, x^*) = x^* + \int_{t^*}^t f(\tau, \varphi(\tau, t^*, x^*)) d\tau.$$

对上述两式做差并进行估值:

$$\begin{aligned} |\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t^*, x^*)| &\leq |x_0 - x^*| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0)) d\tau - \int_{t^*}^t f(\tau, \varphi(\tau, t^*, x^*)) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t |f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0)) - f(\tau, \varphi(\tau, t^*, x^*))| d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^{t^*} |f(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0))| d\tau \right| + |x_0 - x^*| \\ &\leq (1 + M)\delta + L \left| \int_{t^*}^t |\varphi(\tau, t_0, x_0) - \varphi(\tau, t^*, x^*)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

运用前边引理, 则有:

$$\begin{aligned} |\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t^*, x^*)| &\leq (1 + M)\delta e^{L|t_0 - t^*|} \\ &\leq (1 + M)\delta e^{L(b-a)} \leq \delta_1 < \epsilon \end{aligned}$$

因此, 只要在 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 尚有定义的区间上, 上式就成立

下面证明 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义. 只证 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 在区间 $[t_0, b]$ 上有定义, 对在区间 $[a, t_0]$ 的情况可类似证明.

因为解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 不能越过曲线 $x = \varphi(t, t^*, x^*) + \epsilon$ 和 $x = \varphi(t, t^*, x^*) - \epsilon$, 但是由解的延展定理, 解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 可以延展到无限接边的边界, 于是, 它在向右延展时必须由 $t = b$ 穿出区域 U , 即 $\varphi(t, t_0, x_0)$ 在区间 $[t_0, b]$ 上总是有定义的. 定理得证.

以下是关于正文 Bellman 引理中不等式估计的证明及补充.

引理 1.5.2 如果 α 是实常数, $\beta(t)$ 是 $[a, b]$ 上的非负可积函数, 而 $x(t)$ 是 $[a, b]$ 上的实值连续函数, 满足如下不等式成立:

$$x(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)x(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

则对 $x(t)$ 有如下不等式估计:

$$x(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \quad t \in [a, b]. \quad (1.5.51)$$

不等式 (1.5.51) 即为通常说的 Gronwall 不等式. 只要注意进行分情况讨论, 从此引理即可自然地推出 Bellman 引理, 当然 Bellman 引理也可通过与下面引理类似的方法直接证得.

引理 1.5.3 假设 $\beta(t)$ 是 $[a, b]$ 上的非负可积函数, $x(t), \alpha(t)$ 是 $[a, b]$ 上的实值连续函数, 且有如下不等式成立, 而 $x(t)$ 是 $[a, b]$ 上的连续实值函数, 满足如下不等式:

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)x(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

则对 $x(t)$ 有如下推广的 Gronwall 不等式估计

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau) d\tau\right) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (1.5.52)$$

证: 记 $R(t) = \int_a^t \beta(s) x(s) ds$, 则至多去掉是一个零测度的集合有:

$$\frac{dR}{dt} = \beta(t) x(t) \leq \beta(t) \alpha(t) + \beta(t) R(t),$$

由上式即得:

$$\frac{dR}{dt} - \beta(t) R(t) \leq \beta(t) \alpha(t),$$

对上式两边同时乘一个指数因子并把变量 t 换为 s , 至多去掉一零测度集合, 成立如下不等式:

$$\frac{d}{ds} \left(R(s) \exp\left(1 - \int_a^s \beta(\tau) d\tau\right) \right) \leq \beta(s) \alpha(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(\tau) d\tau\right), \quad s \in [a, b],$$

对上式从 a 到 t 积分, 得到:

$$R(t) \exp\left(-\int_a^t \beta(\tau) d\tau\right) \leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(\tau) d\tau\right) ds, \quad s \in [a, b],$$

移项整理后可得:

$$R(t) \leq \int_a^t \beta(s) \alpha(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau) d\tau\right) ds, \quad s \in [a, b],$$

由此即得估计式 (1.5.52).

在上式中, 当 α 是常数时, 只要对式 (1.5.52) 右端积分出原函数, 计算即得估计式 (1.5.51), 即 Gronwall 不等式是此引理的推论.

1.6 解对初值的可微性

定理 1.6.1 (解对初值的可微性) 设 $f(t, x)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 都在区域 G 内连续, 则方程 (1.3.35) 和方程 (1.3.36) 的解 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 作为 t, t_0, x_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

证: 由于 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在区域 G 内连续, 推知 $f(t, x)$ 在 G 内关于 x 满足局部利普希茨条件. 因此, 在定理的条件下, 由解对初值的连续依赖性, $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 在它的存在范围内关于 t, t_0, x_0 是连续的. 下面进一步证明, 对于函数 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 的存在范围内的任一点偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续.

先证明 $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$ 存在且连续.

设由初值 (t_0, x_0) 和 $(t_0 + \Delta t_0, x_0)$ ($|\Delta t_0| \leq a$, a 为足够小的正数) 所确定的方程的解分别为:

$$x = \varphi(t, t_0, x_0) \equiv \varphi \text{ 和 } x = \varphi(t, t_0 + \Delta t_0, x_0) \equiv \psi,$$

即:

$$\varphi \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \varphi) dt \text{ 和 } \psi \equiv x_0 + \int_{t_0 + \Delta t_0}^t f(t, \psi) dt.$$

于是可以得到:

$$\begin{aligned}\psi - \varphi &\equiv \int_{t_0+\Delta t_0}^t f(t, \psi) dt - \int_{t_0}^t f(t, \varphi) dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} f(t, \psi) dt + \int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, \varphi + \theta(\psi - \varphi))}{\partial x} (\psi - \varphi) dt,\end{aligned}$$

其中, $0 < \theta < 1$. 注意到 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 φ, ψ 的连续性, 有:

$$\frac{\partial f(t, \varphi + \theta(\psi - \varphi))}{\partial x} = \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} + r_1,$$

这里 r_1 具有如下性质: 当 $\Delta t_0 \rightarrow 0$ 时, $r_1 \rightarrow 0$, 且当 $\Delta t_0 = 0$ 时, $r_1 = 0$.

类似地, 我们可以得到:

$$- \frac{1}{\Delta t_0} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} f(t, \psi) dt = -f(t_0, x_0) + r_2,$$

其中, r_2 和 r_1 具有相同的性质, 因此对于 $\Delta t_0 \neq 0$, 我们有:

$$\frac{\psi - \varphi}{\Delta t_0} \equiv [-f(t_0, x_0) + r_2] + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} + r_1 \right] \frac{\psi - \varphi}{\Delta t_0} dt,$$

即:

$$z = \frac{\psi - \varphi}{\Delta t_0},$$

是初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} + r_1 \right] z, \\ z(t_0) = -f(t_0, x_0) + r_2 \equiv z_0, \end{cases} \quad (1.6.53)$$

的解, 在这里 $\Delta t_0 \neq 0$ 被看成参数. 显然, 当 $\Delta t_0 = 0$ 时, 上述问题仍然有解. 根据解对初值和参数的连续定理, 我们可以知道, $\frac{\psi - \varphi}{\Delta t_0}$ 是 $t, t_0, z_0, \Delta t_0$ 的连续函数. 从而存在:

$$\lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{\psi - \varphi}{\Delta t_0} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$$

而 $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$ 是初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} z, \\ z(t_0) = -f(t_0, x_0), \end{cases} \quad (1.6.54)$$

的解, 不难求得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = -f(t_0, x_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} dt \right),$$

显然, 它是 t, t_0, x_0 的连续函数.

同样, 可以证明, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续.

事实上, 设 $x = \varphi(t, t_0, x_0 + \Delta x_0) \equiv \tilde{\varphi}$ 为初值 $(t_0, x_0 + \Delta x_0)$ ($|\Delta x_0| \leq a$) 所确定的解. 类似上述的推理可以证得 $\frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{\Delta x_0}$ 是初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} + r_3 \right] z; \\ z(t_0) = 1, \end{cases} \quad (1.6.55)$$

的解. 因而:

$$\frac{\tilde{\psi} - \varphi}{\Delta x_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} dt\right),$$

其中, r_3 具有性质: 当 $\Delta x_0 \rightarrow 0$ 时, $r_3 \rightarrow 0$, 且当 $\Delta x_0 = 0$ 时, $r_3 = 0$.

于是得 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 存在且是 t, t_0, x_0 的连续函数.

其中, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 是下面初值问题的解:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(t, \varphi)}{\partial x} z; \\ z(t_0) = 1. \end{cases} \quad (1.6.56)$$

至于 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 的存在性和连续性, 只需注意到 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 是方程的解, 因而:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t, \varphi(t, t_0, x_0)),$$

由 f 及 φ 的连续性直接可以得出结论.

附注 微分方程(1.6.54)、方程(1.6.56)的第一式都称为是方程(1.3.35)的一次变分方程. 尽管变分方程与原方程有解有关, 但利用变分方程可以对原方程的解做一些理论分析, 或者求特定初值下解对初值的微分(导数).

例 1.6.1 已知函数 $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ 是初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin(tx); \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6.57)$$

的解. 试求 $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \Big|_{t_0=x_0=0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{t_0=x_0=0}$ 的值.

解: (利用变分方程)从初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = t \cos(t\varphi) z; \\ z(t_0) = -\sin(t_0 x_0), \end{cases}$$

可以解得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \Big|_{t_0=x_0=0} = -\sin(t_0 x_0) e^{\int_{t_0}^t s \cos(s\varphi) ds},$$

其中, $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ 是方程(1.6.57)的解. 因此:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \Big|_{t_0=x_0=0} = 0.$$

类似的, 可从

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = t \cos(t\varphi) z; \\ z(t_0) = 1, \end{cases}$$

解得：

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right| = e^{\int_{t_0}^t s \cos(s \varphi(s, t_0, x_0)) ds}.$$

再注意到 $\varphi(t, 0, 0) = 0$ ，因此：

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right|_{t_0 = x_0 = 0} = e^{\int_0^t s ds} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

习题

设 $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ 是初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x); \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

的解，试证明：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} f(t_0, x_0) = 0.$$

第 2 章 初等积分法

微分方程来源于生产实际,研究微分方程的目的就在于掌握它所反映的客观规律,能动地解释所出现的客观现象并预测未来可能出现的情况.对于反映某一运动规律的微分方程,如果能找出其通解的表达式,一般来说,就能按给定的条件相应地选定其中的任意常数,获得所需要的特解.因此,对已知的微分方程我们首先想到的是求解.为此,我们在这一章介绍微分方程的初等解法.当然,在以后的学习中可以看到能够解出通解甚至特解的方程是比较少的,对于不能求得通解或特解的微分方程,我们将在第 4 章中通过方程本身的特点来分析其解所蕴涵运动形态.

我们在本章中将要介绍的微分方程的初等解法,就是通过积分的方法,把方程的解用初等函数及初等函数的积分表示出来,一般称为初等积分法.

2.1 初等积分法

这一节具体介绍初等积分法,首先从最简单的类型谈起.

2.1.1 分离变量法

分离变量法是最简单、最直接的求解常微分方程的方法,它的想法是将变量分开,可以针对单一变量进行讨论.

1. 变量可分离的方程

形如:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad (2.1.1)$$

的方程称为变量可分离的方程,它的特点是右端为自变量 x 的函数与因变量 y 的函数的乘积,其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都是已知的连续函数.

为了解这个方程,需要考察以下两种情况.

(1) 若 $g(y) = 0$ 有某些实根 $y = a$, 那么把函数 $y = a$ 代入方程 (2.1.1) 就可以直接验证 $y = a$ 是否为方程的解.

(2) 若 $g(y) \neq 0$, 设 $y = \phi(x)$ ($a < x < b$) 是方程 (2.1.1) 的解. 根据解的定义, 在区间 $a < x < b$ 内有

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = f(x) \cdot g(\phi(x)),$$

因为 $g(\phi(x)) \neq 0$, 上式可以改写为:

$$\frac{d\phi(x)}{g(\phi(x))} = f(x) dx,$$

在 $a < x < b$ 内任取一点 x_0 , 令 $y_0 = \phi(x_0)$, 从 x_0 到 x 积分上式, 推知在 $a < x < b$ 内有:

$$\int_{x_0}^x \frac{d\phi(\tau)}{g(\phi(\tau))} \equiv \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau,$$

在左端积分中, 做代换 $\xi = \phi(\tau)$, 就得到:

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau,$$

所以 $y = \phi(x)$ 是关系式:

$$\int_{y_0}^y \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau, \quad (2.1.2)$$

所确定的隐函数.

反之, 若 $y = \psi(x)$ 在某区间 $a < x < b$ 内是由方程 (2.1.2) 所确定的隐函数, 它在 x_0 取值 y_0 , 即在 $a < x < b$ 内成立恒等式:

$$\int_{y_0}^{\psi(x)} \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau,$$

两边关于 x 求导, 得到

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \equiv f(x) \cdot g(\psi(x)),$$

所以 $y = \psi(x)$ 是方程 (2.1.1) 的解.

同样, 可以证明关系式

$$\int_{y_0}^y \frac{d\xi}{g(\xi)} \equiv \int_{x_0}^x f(\tau) d\tau + c \quad (c \text{ 是任意常数}), \quad (2.1.3)$$

所确定的函数 $x = \psi(t, C)$ 也是方程 (2.1.1) 的解. 同时, 方程 (2.1.3) 是方程 (2.1.1) 的通积分 (含有任意常数的积分).

综合上述两种情况, 在求解方程 (2.1.1) 时, 除了求出使 $g(y) = 0$ 在某些值 $y = a$ 以外, 只要用 $g(y)$ 除方程 (2.1.1) 的两边, 使变量 x, y 分离开来, 得到:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,$$

采用不定积分, 就得到通积分 (通解).

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c \quad (c \text{ 是任意常数}),$$

以后如果不做特别的说明, 那么 $\int \frac{dy}{g(y)}$ 与 $\int f(x) dx$ 分别表示 $\frac{1}{g(y)}$ 与 $f(x)$ 的某个确定的原函数. 这样, 在原则上就求出了方程 (2.1.1) 的全部解 (或积分). 其中的积分, 在函数 $f(x)$ 与 $g(y)$ 给定后, 应该尽可能计算出来. 还需要注意的是, 由 $g(y) = 0$ 得出的解 $y = a$ 往往不包含在通积分中, 不要在分离变量时因为疏忽而把这种解丢失.

例 2.1.1 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

解: 分离变量, 得到:

$$y dy = -x dx.$$

两边积分, 就有:

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1^2,$$

因此, 圆周

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (c \neq 0),$$

就是通积分, 或者从中求出通解 $y = \pm \sqrt{c^2 - x^2}$.

例 2.1.2 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

解: (1) 因 $y^2 - 1 = 0$ 有实根 $y = \pm 1$, 因此函数 $y = 1$, $y = -1$ 都是解.

(2) 在 $y^2 - 1 \neq 0$ 时, 可分离变量, 得到:

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}dx,$$

两边积分, 得到通积分:

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + c_1,$$

即

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{x+c_1} = e^{c_1} \cdot e^x = c_2 e^x \quad (c^2 = e^{c_1} > 0),$$

可去掉绝对值得方程通解:

$$\frac{y-1}{y+1} = ce^x \quad (c \neq 0),$$

且有 $y = 1$, $y = -1$ 也是方程的解.

例 2.1.3 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y,$$

其中, $P(x)$ 是 x 的连续函数.

解: 在 $y \neq 0$ 时, 分离变量得到:

$$\frac{dy}{y} = P(x)dx,$$

两边积分, 得到:

$$\ln |y| = \int P(x)dx + c_1,$$

从而

$$|y| = e^{\int P(x)dx + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{\int P(x)dx},$$

即:

$$y = \pm e^{c_1} e^{\int P(x)dx} = ce^{\int P(x)dx} \quad (c = \pm e^{c_1} \neq 0),$$

是方程的通解. 此外, 函数 $y = 0$ 也是方程的解. 原来它不包含在通解中, 但是如果在通解中去掉 $c \neq 0$ 的限制而允许 $c = 0$, 就可把这个特解 $y = 0$ 包含在内, 最后就得到方程的全部解是:

$$y = ce^{\int P(x)dx},$$

其中, c 是任意常数.

2. 可化为变量可分离的方程

有些方程, 虽然本身不能直接分离变量, 但可以通过变量变换化为变量可分离的方程. 下面介绍两种简单情形.

1) 齐次方程

形状如

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

的方程, 称为齐次方程, 其中 $g(u)$ 是 u 的连续函数.

做变换 $\frac{y}{x} = u$, 即令 $y = ux$, 引进新的未知函数 u 代替 y , 那么由于:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

原方程变为:

$$u + x \frac{du}{dx} = g(u),$$

整理得到变量可分离的方程:

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x},$$

在求得它的全部解之后, 再用 $u = \frac{y}{x}$ 代回原变量 y, x , 就得到原方程的全部解.

例 2.1.4 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}.$$

解: 令 $y = ux$, 代入整理得变量可分离的方程:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\tan u}{x},$$

求积分后代回 $u = \frac{y}{x}$ 得:

$$\sin \frac{y}{x} = cx,$$

其中, c 是任意常数.

2) 可化为齐次方程的方程

有些方程可以经过变量变换化为齐次方程, 从而求解. 例如方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (2.1.4)$$

就是其中之一, 这里 a, b, c, a_1, b_1, c_1 都是已知的常数.

若 $c_1 = c = 0$, 那么方程(2.1.4)就是齐次方程.

若 c 和 c_1 不全为零, 此时, 可试做变换:

$$y = \eta + k, \quad x = \xi + h, \quad (2.1.5)$$

引进新的变量 ξ, η 代替 x, y , 这里 h, k 是待定的常数. 把式(2.1.5)代入方程(2.1.4), 得到:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}.$$

因此, 选取常数 h, k 使

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0; \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

就可以化为齐次方程:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}.$$

显然, 方程组(2.1.6)的每个方程都表示一条直线, 当这两条直线不平行时, 则有唯一解 h, k . 变换(2.1.5)表示把坐标原点平移到这两条直线的交点 (h, k) .

这种方法仅在方程组(2.1.6)中两条直线不平行时有效, 否则方程组(2.1.6)的系数成比例, 即 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda$, 方程(2.1.4)实际上是:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} = f(ax + by),$$

所以, 做变换 $ax + by = u$ 就把它化为可分离变量的方程:

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u),$$

总之, 形如方程(2.1.4)的方程, 通过适当的变换可化为变量可分离的方程, 在实际求解时可按具体情形, 分别做出适当变换, 就可得出方程的解(或积分).

例 2.1.5 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

解: 令 $y = \eta + k, x = \xi + h$, 代入得

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\left(\frac{\eta + k + 2}{\xi + \eta + h + k - 1}\right)^2$$

由 $k+2=0, h+k-1=0$, 解出 $h=3, k=-2$, 上述方程化为齐次方程:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\left(\frac{\eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

再令 $\eta = u\xi$, 则它化为:

$$u + \xi \frac{du}{d\xi} = 2\left(\frac{u}{1+u}\right)^2$$

整理后分离变量积分得:

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{1+u^2} \right) du = - \int \frac{d\xi}{\xi} + c_1, \quad u \neq 0,$$

即:

$$\ln |u\xi| = -2\arctan u + c_1, \quad u \neq 0,$$

从而得到:

$$\eta = ce^{-2\arctan \frac{\eta}{\xi}} \quad (c = \pm e^{c_1} \neq 0).$$

如果允许 $c=0$, 那么就把 $u=0$ 所对应的特解 $\eta=0$ 也包含在内.

最后代回原变量 x, y , 就得到原方程的通积分

$$x + 2 = ce^{-2\arctan \frac{y+2}{x-3}},$$

其中, c 是任意常数.

2.1.2 线性方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.1.7)$$

的方程称为线性方程, 其中 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 是某个区间 $a < x < b$ 内的连续函数, 这类方程的特点是它关于未知函数 y 及其导数 $\frac{dy}{dx}$ 都是一次的.

若 $Q(x) = 0$, 则方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2.1.8)$$

称为齐次的线性方程, 若 $Q(x) \neq 0$, 就称为非齐次的线性方程. 齐次方程(2.1.8)可以用分离变量法求解. 可以参看例 2.1.3 的求法.

对于方程(2.1.8), 可解得通解为:

$$y = ce^{-\int P(x)dx}, \quad c \text{ 是任意常数},$$

进而考察非齐次方程(2.1.7), 试用函数 $e^{\int P(x)dx}$ 乘以方程(2.1.7)的两边后, 方程化为:

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx}) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

于是:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c.$$

从而获得:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right], \quad (2.1.9)$$

这就是通解(c 为积分常数, 可取任意值), 此外别无他解.

注意到上述方法在原方程两边所乘的因子不为零, 这不会增加或减少原方程的解. 这种用某个非零函数乘方程的两边, 使之转化为可以求积分的方法, 通常称为积分因子法. 在后面还要继续学习.

有些方程可以做适当变换后化为线性方程, 然后可求解.

例 2.1.6 求解伯努利(J. Bernoulli, I. Bernoulli) 方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

其中, $P(x)$ 、 $Q(x)$ 是 $a < x < b$ 内的连续函数.

解: 当 $\alpha = 0$ 时, 它是线性方程, $\alpha = 1$ 时是可分离变量的方程. 又当 α 是正数时, $y = 0$ 是一个特解. 以下假设 $\alpha \neq 0, 1$, $y \neq 0$. 我们用 y^α 除方程两边, 得到:

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-\alpha+1} = Q(x).$$

因此, 做变换 $u = y^{-\alpha+1}$, 引进新的未知函数 u 后, 由:

$$\frac{du}{dx} = (1 - \alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx}$$

得到:

$$\frac{du}{dx} + (1 - \alpha)P(x)y = (1 - \alpha)Q(x).$$

这就是关于 u 的线性方程. 因此, 可以求出它的全部解. 然后代回原变量, 就得到原方程的全部解.

例 2.1.7 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + y^2.$$

解: 这是一个伯努利方程, 有解 $y = 0$. 当 $y \neq 0$ 时, 做变换 $u = y^{-1}$, 化简方程得到:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u - 1,$$

它是关于 u 的线性方程, 由公式(2.1.9), 可写出全部解为:

$$u = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[c_1 + \int (-1) e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right] = \frac{3c_1 - x^3}{3x^2} = \frac{c - x^3}{3x^2},$$

所以, 原方程的通解为:

$$y^{-1} = \frac{c - x^3}{3x^2},$$

以及特解 $y = 0$.

上面所描述的求解方法都是用适当的变换使方程最终转化为可以求积分的类型. 在常微分方程中, 做变换是常用的方法. 至于什么方程做什么变换可达到求解的目的, 必须根据方程本身的特点, 具体分析, 灵活运用.

2.1.3 全微分方程与积分因子

在解方程时, 从积分的角度来说, 自变量与未知函数的地位是一样的, 只要求得它们的关系式, 就在原则上解决了求解问题. 这部分我们讨论变量 x 和 y 是对称的形式:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.1.10)$$

这里假设 $M(x, y)$, $N(x, y)$ 在 xoy 平面上的某区域 G 内连续且不同时为零, 又具有连续的一阶偏导数.

1. 全微分方程

如果方程(2.1.10)的左端 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)$$

则称方程是全微分方程(又称恰当方程).

例如方程:

$$xdx + ydy = 0,$$

它的左端是 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 的全微分, 所以它是一个全微分方程, 这个方程的通积分是:

$$x^2 + y^2 = C.$$

对于一般的全微分方程(2.1.10), 容易看到, 它的通积分就是:

$$u(x, y) = c,$$

这里 c 是任意常数. 因此, 只要找到函数 $u(x, y)$, 就可以解决全微分方程的求解问题. 在一

些简单的情形下, 常可用直接观察法求 $u(x, y)$, 从而得到方程的解. 如果观察有困难, 自然有两个问题, 方程是否为全微分方程? 如果是, 如何求出函数 $u(x, y)$?

定理 2.1.1 假设方程(2.1.10)中的函数 M, N 在 xOy 平面上的单连通区域 G 内具有连续的一阶偏导数, 那么方程(2.1.10)是全微分方程的充要条件是在 G 内成立恒等式:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad (2.1.11)$$

并且函数 $u(x, y)$ 可由下式来表示:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(\xi, \eta) d\xi + N(\xi, \eta) d\eta, \quad (2.1.12)$$

即对 $Mdx + Ndy$ 做有某定点 (x_0, y_0) 沿任意路径到点 (x, y) 的曲线积分.

特别地, 沿平行坐标轴矩形区域的直线段, 可将 $u(x, y)$ 写成:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y N(x, \eta) d\eta, \quad (2.1.13)$$

或

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta. \quad (2.1.14)$$

例 2.1.8 求解方程:

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0. \quad (2.1.15)$$

解: 这里 $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 6x^2y + 4y^3$, 且

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy,$$

即:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

成立. 所以, 给定的方程(2.1.15)是全微分方程. 由公式(2.1.13)可得:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \int_{x_0}^x (3\xi^2 + 6\xi y_0^2) d\xi + \int_{y_0}^y (6x^2\eta + 4\eta^3) d\eta \\ &= x^3 - 3x^2y^2 + y^4 - x_0^3 - 3x_0^2y_0^2 - y_0^4 \end{aligned}$$

事实上, 只需取 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 即可得到 $x^3 - 3x^2y^2 + y^4 = c$ 为方程的通解.

2. 积分因子

有些微分形式的微分方程, 本身不是全微分方程, 但乘上一个适当的函数 $\mu(x, y) \neq 0$ 后能使方程:

$$\mu(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0, \quad (2.1.16)$$

成为全微分方程, 称 $\mu(x, y)$ 是方程(2.1.10)的积分因子. 由于函数 $\mu(x, y) \neq 0$, 因此, 方程(2.1.16)与方程(2.1.10)是同解的. 例如线性方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

就具有积分因子 $e^{\int P(x) dx}$. 又如方程:

$$ydx - xdy = 0,$$

它并非全微分方程, 但是乘上函数 $\frac{1}{y^2}$ 后, 就化为全微分方程:

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

所以 $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$ 就是方程的一个积分因子. 易见方程还有其他的积分因子, 如

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2-y^2}$$

如何求积分因子呢? 观察法自然是最简便的途径. 针对函数 $\mu(x, y) \neq 0$ 是方程的积分因子的充要条件:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

来决定 μ , 即 $\mu(x, y)$ 是偏微分方程

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu, \quad (2.1.17)$$

的解. 求解偏微分方程一般比求解常微分方程困难. 但是, 并不要求偏导数, 而是只要能设法求得它的一个非零特解就行了. 这个要求, 在某些特殊情况下是可以办到的.

例如, 试找方程(2.1.17)的只与 x 有关与 y 无关的解 $\mu(x)$, 那么 $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$, 这时, 方程(2.1.17)就是:

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

即:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx.$$

由此可知, 方程(2.1.10)具有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$ 的充要条件是 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ 只与 x 有关而与 y 无关. 这时, 可求得:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx} \quad (2.1.18)$$

同理, 方程(2.1.10)具有只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)$ 的充要条件是 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ 只与 y 有关而与 x 无关. 这时, 可求得:

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy} \quad (2.1.19)$$

例 2.1.9 求解方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

解: 显然, $y=0$ 是方程的解.

当 $y \neq 0$ 时, 分母有理化, 方程就改写为:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

整理可得:

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2} dx,$$

易见 $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 是它的积分因子, 用 μ 乘上式得:

$$d \sqrt{x^2 + y^2} = dx,$$

所以它的通积分是 $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$, 即:

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

一般说来, 积分因子的寻找具有相当程度的技巧性, 是不容易求得的. 与全微分方程一样, 有时候利用一些二元函数的全微分来观察得到积分因子. 经常用的二元函数的全微分有:

$$y dx + x dy = d(xy);$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2),$$

等等.

本节讨论了两种形式的一阶方程, 一阶显式方程:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

和微分形式方程:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

的求解方法. 给出了两种途径: 一种是以变量可分离的方程的解法为基础, 设法经过变换把方程变成变量可分离的方程; 另一种是以全微分方程为基础, 设法寻求方程的积分因子, 把方程化为全微分方程. 具体求解一阶方程时, 应区别方程的类型, 选用适当的方法.

习题

1. 求下列方程的全部解或积分.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x^2)}{x(1+x^2)};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \sin x;$$

$$(3) \sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$$

$$(4) x(y^2 - 1) dx + y(x^2 - 1) dy = 0;$$

$$(5) \sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = 1 + y^2;$$

$$(7) (y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0;$$

$$(8) (3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + x)dy = 0;$$

$$(9) y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx};$$

$$(10) (x + 2y + 1) \frac{dy}{dx} = 2x + 4y + 3;$$

$$(11) \cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \sin^2 x;$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3};$$

$$(13) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^2;$$

$$(14) x \frac{dy}{dx} - 4y = x\sqrt{y};$$

$$(15) \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)};$$

$$(16) \frac{dy}{dx}(x^2y^2 + xy) = 1;$$

$$(17) x \frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ln x;$$

$$(18) \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0;$$

$$(19) e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0;$$

$$(20) e^y dx - x(2xy + e^y) dy = 0;$$

$$(21) 2xy^2 dx + (y^2 + x + y) dy = 0;$$

$$(22) \left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0;$$

$$(23) (x - y)^2 dx + 2xy dy = 0;$$

$$(24) (x^2 y^2 - 1) dy + 2xy^3 dx = 0;$$

$$(25) ye^{\frac{x}{y}} dx + (y - xe^{\frac{x}{y}}) dy = 0;$$

$$(26) \frac{dy}{dx} + \frac{d\phi(x)}{dt} y = \phi(x) \frac{d\phi(x)}{dx}, \text{ 其中 } \phi(t) \text{ 是已知函数.}$$

2. 若已知 $y = \phi(x)$ 是黎卡提(Ricatti)方程:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

的一个解, 试用代换 $y = z + \phi(x)$, 证明新的未知函数 z 适合贝努利方程:

$$\frac{dz}{dx} = p(x)z^2 + [2p(x)\phi(x) + q(x)]z.$$

3. 求方程:

$$x \sqrt{1+y^2} + y \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

的通积分, 并求过点 $(0, 1)$ 的积分曲线.

4. 求方程:

$$(x-1)\cos y dy = 2\sin y dx,$$

的全部解, 并求满足初值条件 $x(0) = \frac{\pi}{4}$ 的特解.

5. 一质量为 m 的质点, 有大小与时间立方成正比(设比例系数为 k_1)的外力作用在其上, 从初速为零开始做直线运动. 此外, 质点又受阻力, 其大小与速度和时间的乘积成正比(设比例系数为 k_2). 试求速度函数 $v(t)$.

6. 求变量可分离方程:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0,$$

的积分因子.

7. 若方程:

$$dy - f(x, y)dx = 0,$$

有只依赖于 x 的积分因子, 试证它一定是线性方程.

8. 试求出方程:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

具有形为 $\mu(x+y)$ 及 $\mu(xy)$ 的积分因子的充分条件和必要条件.

9. 求解方程:

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)dy = 0.$$

10. 求解方程:

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^2y^2 - x)dy = 0.$$

11. 试做适当变换, 求解下列方程:

$$(1) \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y = x + 1;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 1 = e^{x+2y};$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y^2}{2y(x+y^2)};$$

$$(4) x \frac{dy}{dx} + y = y \ln(xy);$$

$$(5) \frac{dy}{dx}(x^2 + y^2 + 3) = 2x \left(2y - \frac{x^2}{y} \right).$$

12. 若方程:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y + P(t)e^{at},$$

其中, $P(t)$ 是多项式, λ, a 是常数, 证明: 它的解具有形状:

$$y = Ce^{\lambda t} + Q(t)e^{at},$$

其中, $Q(t)$ 也是多项式. 当 $\lambda \neq a$ 时, 它的次数与 $P(t)$ 的次数相同; 当 $\lambda = a$ 时, 它的次数等于 $P(t)$ 的次数加 1, C 是任意常数.

2.2 可化为初等积分法求解的方程

这一节, 讨论可以通过变换或其他手段, 化为可直接利用初等积分法求解的方程.

2.2.1 隐式方程

一阶方程的隐式形式为:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.2.20)$$

对于这类方程, 如果可以直接解出导数, 即得到 $y' = f(x, y)$ 的形式, 即可以按照 2.1 节讨论的方法求解. 本节重点放在导数未能直接解出的这类方程上, 对于这类方程, 总的求解原则就是设法使它转化为解出导数的类型, 然后选用前面介绍的适当方法求解.

1. 直接解出导数

如果能从方程(2.2.20)中直接解出导数 y' , 就得到一个或几个形状为:

$$y' = f_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

的方程, 求解这些已解出导数的方程, 就求得了方程(2.2.20)的全部解.

例 2.2.1 求解方程:

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

解: 易从它直接解出 y' 而得到两个方程:

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y' = -2\sqrt{y}, \quad (y \geq 0)$$

求解这两个方程, 得到:

$$\sqrt{y} = x + c, \quad \sqrt{y} = -x + c \quad \text{及} \quad x = 0,$$

或者合并写为:

$$y = x + c^2 \quad \text{及} \quad x = 0,$$

它们就是原方程的全部解.

2. 方程 $y = f(x, y')$ 或 $x = g(y, y')$

有时从方程(2.2.20)不易解出 y' , 或者即使易于解出 y' , 也不易用初等积分方法求解. 考虑如果易于从方程(2.2.20)中解出 y 或 x 时, 即得到方程:

$$y = f(x, y'), \quad (2.2.21)$$

或

$$x = g(y, y'), \quad (2.2.22)$$

的求解方法.

(1) 对于方程(2.2.21), 若记 $y' = p$, 那么整理成为:

$$y = f(x, p),$$

它表明方程(2.2.21)的积分曲线上点 (x, y) 与切线余率 p 的关系, 如果在两边对 x 求导, 得:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

这时得到 p 的微分方程:

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} = p, \quad (2.2.23)$$

它是 p 的变化率与 x, p 的关系式.

如果容易求出方程(2.2.23)的通解:

$$p = \phi(x, c),$$

那么

$$y = f(x, \phi(x, c)),$$

是方程(2.2.21)的解. 读者自行代入验证.

如果容易求出方程(2.2.23)的通解:

$$x = \psi(p, c),$$

那么方程(2.2.21)的通积分是:

$$\begin{cases} x = \psi(p, c); \\ y = f(\psi(p, c), p), \end{cases}$$

这里把 $p = y'$ 当做参数来描述积分曲线的.

(2) 同样的说明对于方程(2.2.22)也适用. 即若记 $y' = p$, 那么方程就成为:

$$x = g(y, p)$$

它是方程(2.2.22)的积分曲上的点 (x, y) 与斜率 p 的关系. 如果在两边对 y 求导, 得到:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial g(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial g(y, p)}{\partial p} \frac{dp}{dy},$$

利用 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ 就推得 p 的微分方程:

$$\frac{\partial g(y, p)}{\partial p} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial g(y, p)}{\partial y} = \frac{1}{p}, \quad (2.2.24)$$

它是 p 关于 y 的变化率与 y, p 的关系.

如果容易求出方程(2.2.24)的通解:

$$p = \phi_1(y, c),$$

那么

$$x = g(y, \phi_1(y, c)),$$

是方程(2.2.22)的解.

如果容易求出方程(2.2.24)的通解:

$$y = \psi_1(p, c),$$

那么方程(2.2.22)的通积分是:

$$\begin{cases} x = g(\psi_1(p, c), p); \\ y = \psi_1(p, c), \end{cases}$$

这里 p 为参数, 用来描述积分曲线.

例 2.2.2 求解方程:

$$y(y')^2 - 2xy' + y = 0.$$

解: 记 $y' = p$, 则方程可写成:

$$yp^2 - 2xp + y = 0,$$

当 $p \neq 0$ 时, 解出 x 得到:

$$x = \frac{yp}{2} + \frac{y}{2p}. \quad (2.2.25)$$

两边关于 y 求导, 并利用 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, 得到:

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2p^2} \right) \frac{dp}{dy} + \frac{p}{2} + \frac{1}{2p},$$

化简为:

$$(p^2 - 1) \left(y \frac{dp}{dy} + p \right) = 0,$$

于是得到两个方程:

$$p^2 - 1 = 0 \quad \text{及} \quad y \frac{dp}{dy} + p = 0,$$

由第一个方程可得 $p = \pm 1$, 代表方程(2.2.25), 就得到特解:

$$y = \pm x,$$

由第二个方程可得 $p = cy^{-1}$, 代入方程(2.2.25), 就得到通积分:

$$y^2 = 2c \left(x - \frac{c}{2} \right), \quad (c \neq 0),$$

此外, 还有 $p=0$ 对应的解 $y=0$. 所以原方程的全部解是:

$$y^2 = 2c \left(x - \frac{c}{2} \right), \quad y = \pm x.$$

例 2.2.3 求解克来洛 (Clairaut) 方程:

$$y = xy' + f(y'), \quad (2.2.26)$$

其中, 函数 $f(u)$ 连续可导, 且 $f'(u) \neq \text{常数}$.

解: 记 $y' = p$, 把方程改写为:

$$y = xp + f(p),$$

两边关于 x 求导, 并记 $\frac{dy}{dx} = p$, 得到:

$$p = p + [x + f'(p)] \frac{dp}{dx},$$

即:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{及} \quad x + f'(p) = 0, \quad (2.2.27)$$

由第一个方程得 $p = C$, 代入原方程得到通解:

$$y = cx + f(c),$$

这个表达式相当于在原方程中用任意常数 c 代替 p 的结果.

由式(2.2.27)的第二个方程得 $x = -f'(p)$, 代入原方程, 得到用 p 作为参数的特解:

$$\begin{cases} x = -f'(p); \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases}$$

2.2.2 可降阶的高阶方程

有些高阶方程可以通过变换使它降低阶数, 达到求解的目的. 下面分别讨论几种特殊类型方程的降阶问题.

1. 不显含未知函数 y 的方程

不显含未知函数 y , 或更一般地, 不显含未知函数及其直到 $(k-1)$ ($k \geq 1$) 阶导数的方程, 它的一般形状是:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.2.28)$$

易见, 若令 $y^{(k)} = u$, 就化为关于 u 的 $n-k$ 阶方程:

$$F(x, u, \dots, u^{(n-k)}) = 0, \quad (2.2.29)$$

它比原方程低 k 阶. 一般来说, 阶数低的方程较阶数高的方程容易求解. 求出了方程 (2.2.29) 的解 $u = \phi(x)$, 就有

$$y^{(k)} = \phi(x),$$

再积分 k 次, 就得到方程 (2.2.28) 的解.

当然, 对于现阶段可以求解的形态主要是:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0.$$

例 2.2.4 求解方程:

$$y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0.$$

解: 令 $y^{(4)} = u$, 它就化为

$$u' - \frac{1}{x}u = 0,$$

这是一阶的变量可分离的方程, 全部解为:

$$u = cx,$$

所以

$$y^{(4)} = cx,$$

积分 4 次, 就得到原方程的通解:

$$y = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5,$$

这里 c_1, c_2, \dots, c_5 是 5 个任意常数.

2. 不显含自变量 x 的方程

不显含自变量 x 的方程的一般形状是:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

这时, 若用 $u = y'$ 作为新的未知函数, 而把 y 当做新的自变量, 那么, 代入方程可以将 n 阶方程降阶为 $n-1$ 阶方程.

特别地, 对于方程:

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (2.2.30)$$

由于:

$$\frac{dy}{dx} = u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy},$$

所以方程 (2.2.30) 可化为:

$$F\left(y, u, u \frac{du}{dy}\right) = 0,$$

即可选用适当初等积分法求解.

例 2.2.5 求解方程:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

解: 令 $u = \frac{dy}{dx}$, 并改取 y 作为新的自变量, 那么

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u \frac{du}{dy},$$

因此, 方程化为:

$$yu \frac{du}{dy} - u^2 = 0,$$

从而可分为:

$$y=0 \quad \text{及} \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y},$$

由这两者可得解为:

$$u = c_1 y, \quad c_1 \text{ 为任意常数.}$$

再代回原变量, 得到:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y,$$

解这个方程, 得到原方程的全部解为:

$$y = c_2 e^{c_1 x}, \quad c_1, c_2 \text{ 为任意常数.}$$

3. 高阶全微分方程和积分因子

如果方程:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2.31)$$

的左端是某个 $n-1$ 阶微分表达式 $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 对 x 的导数, 即:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

就称方程(2.2.31)是全微分方程, 这时, 显然可知:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1, \quad (2.2.32)$$

而方程(2.2.32)为 $n-1$ 阶的, 与方程(2.2.31)同解, 这样就达到了降阶的目的.

与一阶方程一样, 有时方程(2.2.31)本身并非全微分方程, 但是乘上某个适当的函数

$\mu(x, y, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{n-1}})$ 后能使方程:

$$\mu\left(x, y, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{n-1}}\right) F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

成为全微分方程. 这时, 就称函数 $\mu\left(x, y, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ 是方程(2.2.31)的积分因子.

例 2.2.6 用积分因子的方法求解例 2.2.5 中方程:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

解：该方程不是全微分方程，但乘上函数 $\mu = \frac{1}{y^2} (y \neq 0)$ 后，左端化为：

$$\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{d}{dx} \times \left(\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} \right),$$

即化为全微分方程：

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

所以：

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = c_1,$$

因此得到：

$$y = c_2 e^{c_1 x} \quad (c_2 \neq 0).$$

此外，在乘积分因子时，限制了 $y \neq 0$ ，而 $y = 0$ 也是原方程的解，补上后即可去掉 $c_2 \neq 0$ 的限制，所以：

$$y = c_2 e^{c_1 x}$$

是方程的全部解 (c_1, c_2 是两个任意常数)。

习题

1. 求解下列方程：

$$(1) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2) y = x(y')^2 + (y')^3;$$

$$(3) y = xy' + y' + (y')^2;$$

$$(4) y = 2xy' + y^2(y')^3;$$

$$(5) x(y')^3 = 1 + y';$$

$$(6) y = xy' + \frac{m}{y'}, \quad m \text{ 是常数};$$

$$(7) x(y')^2 - 2yy' + x + 2y = 0;$$

$$(8) y(y')^2 + y'(x - y) - x = 0;$$

$$(9) (y')^2(x^2 - 1) - 2xyy' + y^2 - 1 = 0;$$

$$(10) x = yy' + y^2;$$

$$(11) (y')^4 = 4y(xy' - 2y)^2;$$

$$(12) 2xyy' = (y')^8 + 4y^2;$$

$$(13) y' = \ln(xy' - y);$$

$$(14) y(1 + (y')^2) = 2a, \quad (a \text{ 为常数});$$

$$(15) (y')^2 - yy' + e^t = 0.$$

2. 求曲线，使它的切线在两坐标轴之间的线段长度等于常数 a 。

3. 求曲线，使它满足：在第 I 象限内它的切线与两坐标轴相交形成的面积等于 2。

4. 求解高阶方程:

$$(1) \frac{d^2 y}{dx^2} - t \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^3 = 0;$$

$$(2) y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2 \ln x;$$

$$(3) a^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3, (a > 0);$$

$$(4) \frac{d^2 y}{dx^2} \pm \omega^2 x = 0, (\omega > 0);$$

$$(5) \frac{d^3 y}{dx^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2};$$

$$(6) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2};$$

$$(7) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} + y + 1;$$

$$(8) x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2 y \frac{dy}{dx};$$

$$(9) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 15y^2 \sqrt{x};$$

$$(10) x \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x \sin \left(\frac{1}{x} \times \frac{dy}{dx} \right);$$

$$(11) \frac{d^3 y}{dx^3} = 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - 1 \right) \cot x;$$

$$(12) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2e^{-x};$$

$$(13) \cos y \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{dy}{dx}, \text{ 并求满足初始条件 } y(-1) = \frac{\pi}{6}; y'(-1) = 2 \text{ 的特解};$$

$$(14) 2 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0, \text{ 并求满足初始条件 } y(0) = -3; y'(0) = 1; y''(0) = -1 \text{ 的特解}.$$

2.3 模 型

本节讨论最简单的也是最基本的一阶微分方程模型,通过具体的模型实例,体会微分方程对问题的分析、正确地推导等环节中的重要性,以及微分方程在实际中是如何应用的.

生活在资源有限的环境中的人类和动物世界,能否无限制地增长和繁殖?我国人口以多少为极限?动物种群的竞争排斥和弱肉强食,后果如何?生态何以平衡?渔业的捕获量对食肉鱼和被食鱼类的存亡有何影响?等等有趣的问题,是在本节要讨论的内容.

例 2.3.1 种群生态数学模型.

研究生物种群的生存与环境的关系,探索种群数量随时间变化的规律,是生态学家们十分关心的问题,同样也是地球和谐发展的一个重要问题.人们常常通过建立群体消长的数学模型,进行计算和理论分析,来解释、探索、预测及控制某些生态现象,包括人类自身的发

展. 所有生物种群的数量都是在不断变化的, 而且影响这种变化的因素非常复杂, 只有在某些简化的假设条件下才可能得到所需要的模型. 先从简化的模型开始讨论, 逐步深入. 由于讨论变化率, 也就是要引入导数的概念, 所以虽然群体数量是整数变化的量, 但是必须对这个数量函数有一种连续的假设.

假设 1 在没有迁入、迁出的孤立群体中, 时刻 t 的群体数量为 $x(t)$. 当群体规模很大时, 这个函数可视为连续可微函数.

在 x 数值比较大的情况下, δ 相对 x 足够小, 可以接受这样的假设. 问题是如何表示群体数量的变化率:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

也就是设法揭示表达式 $f(x, t)$ 的内容结构. 微分方程模型表述所考察的各个变量及其变化率之间的关系. 这里, 把群体数量变化率看成个体平均变化率 (就是平均每个个体的生殖率和死亡率之差) 与群体数量的乘积, 即:

$$f(x, t) = r(x, t)x(t),$$

其中, 变化率 $r(x, t)$ 在一般情况下应该是某个时刻群体数量的函数, 应该在尽量符合生物生态学特点的前提下进行一定的简化. 如果假定个体的平均升值率、死亡率与时间无关, 记为 $r(x)$, 则可以得到一般性的模型:

$$f(x, t) = r(x)x(t), \quad (2.3.33)$$

假设 2 种群增长率在一个相对短的时间内可以近似看做常数, 即 $r(x) = r$. 这个常数也称为种群固有的自然增长率.

在这两个假设的前提下, 给出一个初始条件, 假设 $x(t_0) = x_0$, 那么种群增长问题就变成了常微分方程的初值问题, 即:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx, \\ x(t_0) = x_0, t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3.34)$$

这是 1798 年 Malthus 提出的指数增长模型, 这个方程很容易求解, 解为 $x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$. 它反映了种群的变化率对种群本身瞬时值得依赖型, 模型简洁明了, 也称为 Malthus 人口模型.

那么这个模型是否符合实际, 或者在什么样的情况下符合实际, 即它的应用范围如何呢?

显然, 若 $r > 0$, 则这个模型表明种群数量按照指数增长, 短时间看, 在外围环境不发生变化并有充足的食物的前提下, 这个结论是合理的. 用此模型估计 1700—1961 年间某些国家的人口数目, 计算结果与人口实况竟然惊人地相似. 但是当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow +\infty$, 可见不能依此长期预报, 具体地, 由此模型可以得到: 2510 年, 世界人口的总数为 2000 亿左右, 这太不可信了, 可见这一模型必须修正. 问题出在马尔萨斯只考虑到繁衍增长的一面, 未看到种内竞争 (如人类战争) 对种群发展的抑制作用.

为此, 修改假设 2.

假设 2' 种群个体的增长率为线性函数 $r(x) = r_0 - Sx$, $S > 0$.

这个假设表明受自然资源和环境条件所能容纳的群体最大数量所限, 种群个体的增长率随着群体数量的增长而不断减少. 如果达到最大容量 x_m , 将有 $r(x_m) = 0$, 这是一个稳定状态. 由线性关系 $r(x_m) = r_0 - Sx_m$, 得出 $S = \frac{r_0}{x_m}$, 则:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x, \\ x(t_0) = x_0, t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3.35)$$

这是1838年荷兰生物学家 Verhulst-Pearl 考虑了单种群成员间的冲突乃至残害现象, 提出的对方程(2.3.34)的修改模型, 称为群体增长的阻滞方程或逻辑模型. 据文献记载, 美国和法国都曾用这个公式预报过人口变化, 结果都非常符合实际.

群体增长率 $\frac{dx}{dt}$ 呈抛物线变化, 个体平均增长率 $r(x)$ 逐渐减少. 其中 $-\frac{r_0}{x_m}x^2$ 项阻滞了群体数量的无限增大, 它表示单位时间内由于同种群的个体之间竞争资源而发生冲突的次数的统计平均, 一般来说 x_m 远大于1. 在 x 比较小时, 个体间没有干扰, 与方程(2.3.34)差不多.

该方程是可分离变量的微分方程, 求解可得:

$$x(t) = \frac{x_m x_0}{x_0 + (x_m - x_0)e^{-r_0(t-t_0)}}, \quad (2.3.36)$$

可以进一步讨论它的图形性质, 来分析种群数量的变化, 进而了解种群动态变化的情况.

当然, 随着我国计划生育政策的实行, 人口出生率得到了有效控制, 人口总量得到了有效控制. 但近几年出现了许多新情况, 如男女性别比例失调、人口老龄化问题严重等, 这就对模型提出了新的要求.

例2.3.2 市场价格形成的动态过程(续).

市场价格形成的线性动态数学模型已经在第1章中以常微分方程(1.2.34)的形式给出. 现在利用本章所介绍的初等解法给出其商品价格函数. 假定在初始时刻 $t=0$ 时, $P(0) = P_0$, 求解方程(1.2.34), 可得:

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{b+d}{a+c}\right)e^{-a(a+c)t} + \frac{b+d}{a+c}. \quad (2.3.37)$$

注意静态均衡价格 \bar{P} 满足:

$$-a\bar{P} + b = c\bar{P} - d,$$

即:

$$\bar{P} = \frac{b+d}{a+c}.$$

在式(2.3.37)的两边取 $t \rightarrow +\infty$, 得 $P(t) \rightarrow \bar{P}$. 又若初始价格 $P_0 = \bar{P}$, 那么, 动态价格保持在均衡价格 \bar{P} , 即整个动态过程转化为静态过程.

由方程(1.2.34)所表示的市场动态结构为一阶负反馈系统. 若 P_0 大于 \bar{P} , 则 $P(t)$ 负指数单调下降趋于 \bar{P} ; 若 P_0 小于 \bar{P} , 则 $P(t)$ 单调增加趋于 \bar{P} , 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \bar{P}$ 的价格称为动态稳定价格.

若需求函数为非线性函数, 则也可以求解描述价格形成的动态过程的微分方程, 并且可知, 随着时间的推移, 物价将逐步向均衡价格. 例如, 取 $f = 5 - P^2$, $g = P - 1$, 则有:

$$\frac{dP}{dt} = a(5 - P^2 - P + 1) = a(3 + P)(2 - P). \quad (2.3.38)$$

初始条件仍为 $P(0) = P_0$, 求解得:

$$\frac{3+P}{2-P} = ce^{5at},$$

其中 $c = \frac{3+P_0}{2-P_0}$. 所以:

$$P = \frac{2(3+P_0)e^{5at} - 3(2-P_0)}{(3+P_0)e^{5at} + (2-P_0)}. \quad (2.3.39)$$

若令 $t \rightarrow +\infty$, 则得 $P(t) \rightarrow 2$. 实际上, 由式(2.3.38)右端等于零可求得 $\bar{P} = 2$, 即随着时间的推移, 价格越来越趋近于均衡价格 $\bar{P} = 2$.

由上面的分析可知, 用来模拟价格动态过程的一阶微分方程在一定程度上反映了价格影响需求与供给, 而需求与供给反过来又影响价格的动态过程, 并且还指出了动态价格逐渐向均衡价格靠拢的变化趋势. 当然这个模拟的模型也有局限性, 因为实际上商品生产需要时间. 因而供给量往往是根据以前某一时刻的价格做出的, 即供给函数为 $g(P(t-\tau))$ (τ 为延时), 也就是说, 用延时动态价格的模型来模拟更为精确. 而对延时模型, 则由于时间的延时加上生产者对价格的过分敏感而造成了价格的不稳定. 可见价格的动态过程与讨论过的情形是不尽相同的.

习题

假设一群体对某流行病很敏感, 可以用下面的方式建立它的模型. 设该群体最初个体数 $p(t)$ 服从:

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \quad (2.3.40)$$

其中 a, b 是参数, 称为生命系数. 并且一旦 P 达到某个小于极限总数 $\frac{a}{b}$ 的特定值 Q 时, 流行病便开始传播. 在此阶段中 $A < a, B < b$, 且式(2.3.40)被

$$\frac{dp}{dt} = Ap - Bp^2 \quad (2.3.41)$$

所取代. 假设 $Q > \frac{A}{B}$, 于是群体个数开始减少. 但群体个数减少到某一值 $q > \frac{A}{B}$ 时, 这个时刻流行病停止传播, 群体又开始服从式(2.3.40)而增长. 直到新的流行病发生. 这样在 q 和 Q 之间 P 发生周期性的波动. 现在要指出如何计算这种波动的周期.

(1) 证明当 p 从 q 增加到 Q 时, 周期的第一部分 T_1 为:

$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{Q(a-bq)}{q(a-bQ)}.$$

(2) 证明当 p 从 Q 减少到 q 时, 周期的第二部分 T_2 为:

$$T_2 = \frac{1}{A} \ln \frac{q(QB-A)}{Q(qB-A)}.$$

第3章 线性微分方程(组)

许多实际问题的数学模型表现为复杂的方程组. 本章首先讨论线性微分方程组的一般理论和简单解法, 然后借助方程组相关理论讨论高阶方程的解法及应用.

3.1 线性方程组的一般理论

含有 n 个未知函数 y_1, y_2, \dots, y_n 的一阶线性微分方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

其中, $a_{ij}(x)$ 和 $f_i(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 在某个区间 $a < x < b$ 上都是连续的. 采用矩阵和向量记号:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

其中:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

则可以把上面的线性微分方程组写成向量形式:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{f}(x), \quad (3.1.1)$$

在 $a < x < b$ 上, 当 $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{0}$ 时, 称方程组(3.1.1)是非线性齐次方程组. 当 $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$ 时, 即得到与方程组(3.1.1)相应的齐次线性微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}, \quad (3.1.2)$$

一阶线性微分方程组(3.1.2)在形式上与一阶线性微分方程类似, 这种类似不仅在形式上, 一阶线性微分方程的一些性质和通解公式, 都可以类推到一阶线性微分方程组.

定理 3.1.1 存在唯一性定理: 一阶线性微分方程组(3.1.1)在区间 $a < x < b$ 上有且仅有一个满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y(x)$, 其中 $x_0 \in (a, b)$ 和 $y_0 \in R^n$ 是任意给

定的.

在讨论一阶非齐次线性微分方程组(3.1.1)之前,先研究一阶齐次线性微分方程组(3.1.2).

3.1.1 一阶线性齐次微分方程组

定理 3.1.2 如果

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

是方程组(3.1.2)的 n 个解,则:

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}_1 + C_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + C_n \mathbf{y}_n, \quad (3.1.3)$$

也是方程组(3.1.2)的解,其中 C_1, C_2, \cdots, C_n 是 n 个任意常数.

证: 只要将式(3.1.3)直接代入一阶齐次线性微分方程组(3.1.2),就可得到一个恒等式.

定理 3.1.3 假设:

$$\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x),$$

是线性齐次微分方程组的 n 个线性无关解,则线性组合 $\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}_1 + C_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + C_n \mathbf{y}_n$ 是齐次方程组(3.1.2)的通解,其中 C_1, C_2, \cdots, C_n 是 n 个独立的任意常数.

假设:

$$\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x), \quad (3.1.4)$$

是线性齐次微分方程组的 n 个解:

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

称由这些向量组成的行列式:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

为解组(3.1.4)的朗斯基(Wronsky)行列式. 矩阵:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix},$$

称为这个解组对应的基本解矩阵.

利用朗斯基行列式可判断向量函数组 $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x)$ 的线性相关与线性无关性.

定理 3.1.4 如果 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是齐次方程组(3.1.2)的 n 个解,则 $W(x) =$

$W(x_0)e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt}$ 这个关系式称为刘维尔公式(Liouville).

定理 3.1.5 线性微分方程组(3.1.2)的解组(3.1.4)线性无关的充要条件为:

$$W(x) \neq 0, (a < x < b) \quad (3.1.5)$$

证: 由刘维尔公式可知, 条件(3.1.5)等价于 $W(x_0) \neq 0$, 而它又等价于初值向量组:

$$\mathbf{y}_1(x_0), \mathbf{y}_2(x_0), \cdots, \mathbf{y}_n(x_0) \quad (3.1.6)$$

在 R^n 中是线性无关的, 而且

$$H(C_1\mathbf{y}_1(x_0) + C_2\mathbf{y}_2(x_0) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x_0)) = C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x).$$

因此, 利用 $H(0)=0$, 易知向量组(3.1.5)在 R^n 中是线性无关的.

推论 3.1.1 解组(3.1.4)是线性相关的充要条件为 $W(x)=0, (a < x < b)$.

例 3.1.1 验证微分方程组:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2}\sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.7)$$

的通解为:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \quad (3.1.8)$$

解: 不难验证:

$$\begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (3.1.9)$$

是齐次线性微分方程组(3.1.7)在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上的两个解; 且它们的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x=0$ 处的值为:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

所以式(3.1.9)是一个基本解组, 从而式(3.1.8)是通解.

3.1.2 一阶线性非齐次微分方程组

现在, 可以利用上面的结果来推导非齐次线性微分方程组:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x),$$

的通解结构.

引理 3.1.1 如果 $\Phi(x)$ 是与方程(3.1.1)对应的齐次线性微分方程组(3.1.2)的一个基解矩阵, $\varphi^*(x)$ 是方程(3.1.1)的一个特解, 则它的任一解 $y = \varphi(x)$ 可以表示为 $\mathbf{y}(x) = \Phi(x)\mathbf{C} + \varphi^*(x)$, 其中 \mathbf{C} 是一个与 $y(x)$ 无关的常数列向量.

证: 容易证明 $\varphi(x) - \varphi^*(x)$ 是方程(3.1.2)的一个解. 因此, 必存在常数列向量 \mathbf{C} , 使得 $\varphi(x) - \varphi^*(x) = \Phi(x)\mathbf{C}$, 这正是所要的证明.

引理 3.1.1 说明, 为了得出方程(3.1.2)的通解, 只需知道它的一个基解矩阵 $\mathbf{Y}(x)$ 和方程(3.1.1)的一个特解 $\mathbf{y}^*(x)$. 然而利用下述常数变易法, 只需知道 $\mathbf{Y}(x)$ 就足够了.

引理 3.1.2 设 $\Phi(x)$ 是(3.1.2)的一个基解矩阵, 则:

$$\varphi^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) f(s) ds,$$

给出了非齐次线性微分方程组(3.1.1)的一个特解.

综合这两个引理, 有下面结论.

定理 3.1.6 设 $\Phi(x)$ 是方程(3.1.2)的一个基解矩阵, 则非齐次线性微分方程组(3.1.1)在区间 $a < x < b$ 上的通解可以表示为:

$$y = \Phi(x) \left(C + \int_{x_0}^x Y^{-1}(s) f(s) ds \right), \quad (3.1.10)$$

其中 C 是 n 维的任意常数列向量, 而且方程(3.1.1)满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为:

$$y = Y(x) Y^{-1}(x_0) y_0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y^{-1}(s) f(s) ds,$$

其中 $x_0 \in (a, b)$.

习题

1. 求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ 的通解, 其中 $A(t)$ 分别为:

$$(1) A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad t \neq 0;$$

$$(2) A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 求解非齐次线性微分方程组的初值问题.

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{2}{t}x; & \frac{dy}{dt} = x + y - 1 + \frac{2}{t}x, (t > 0) \\ x(1) = \frac{1}{3}; & y(1) = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}x; & \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y + x + t, (t > 0) \\ x(1) = 0; & y(1) = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

3. 试证基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组, 即如果方程组 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 与 $\frac{dy}{dx} = B(x)y$ 有一个相同的基解矩阵, 则 $A(x) = B(x)$.

4. 设非齐次线性微分方程组(3.1.1)中的 $f(x)$ 不恒等于 0, 当 $a < x < b$ 时, 则方程组(3.1.1)有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

3.2 常系数线性微分方程组

所谓常系数线性微分方程组, 指的是线性微分方程组:

$$\frac{dY}{dx} = AY + f(x), \quad (3.2.11)$$

中的系数矩阵 A 为 n 阶常数矩阵, 而 $f(x)$ 是在 $a < x < b$ 上连续的向量函数. 已经知道, 求解线性微分方程组(3.2.11)的关键是求出相应齐次线性微分方程组:

$$\frac{dY}{dx} = AY, \quad (3.2.12)$$

的一个基解矩阵. 当 $n=1$ 时, 矩阵 A 就是一个实数 a , 这时方程(3.2.12)为:

$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad (3.2.13)$$

它的通解为 $y = Ce^{ax}$, 其中 C 为任意常数. 换句话说, e^{ax} 是方程(3.2.12)的一个基解矩阵. 一个自然的设想是, 常系数线性微分方程组(3.2.12)有一个基解矩阵为 e^{xA} . 这里, 首先弄清楚把一个矩阵放在指数位置是什么意思.

3.2.1 矩阵指数函数的定义和性质

令 μ 表示由一切 n 阶(实常数)矩阵组成的集合. 在线性代数中, 知道 μ 是一个 n^2 维的线性空间. 对 μ 中的任意元素 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 定义它的模为:

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|,$$

则容易证明:

(1) $\|A\| \geq 0$; 而且 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$ (零矩阵).

(2) 对于任意 $A, B \in \mu$, 有不等式 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

现在, 在 μ 中有了这个模 $\|\cdot\|$, 就可以仿照实数域中的数学分析来定义矩阵序列、柯西矩阵序列和矩阵无穷级数及其收敛性的概念. 而且容易证明, 在 μ 中, 任意柯西序列都是收敛的. 即线性空间 μ 关于模 $\|\cdot\|$ 是完备的.

另外, 在 μ 中还特别有乘法运算, 即对于任意 $A, B \in \mu$, 有 $AB \in \mu$.

(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

利用上述性质, 有:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, (k \geq 1)$$

通常令 A^0 为 n 阶单位矩阵 E . 注意上述不等式对 $k=0$ 不成立. 由此不难证明下述命题.

引理 3.2.1 矩阵 A 的幂级数:

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$

是绝对收敛的.

现以记号 e^A (或 $\exp A$) 表示上述矩阵幂级数的和, 并称它为矩阵 A 的指数函数, 即:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

注意 $e^A \in \mu$. 另外, 当 A 是 1 阶矩阵(即实数)时, e^A 就是通常的指数函数. 现在, 考察一般矩阵指数函数的性质.

引理 3.2.2 矩阵指数函数有以下性质:

(1) 若矩阵 A 和 B 是可交换的(即 $AB = BA$), 则:

$$e^{A+B} = e^A e^B;$$

(2) 对任何矩阵 A , 指数函数 e^A 是可逆的, 且:

$$(e^A)^{-1} = e^{-A};$$

(3) 若 P 是一个非奇异的 n 阶矩阵, 则:

$$e^{PA P^{-1}} = P e^A P^{-1}.$$

证: 留给读者.

3.2.2 基解矩阵

现在, 可以利用矩阵指数函数求常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵, 从而得到它的通解.

定理 3.2.1 矩阵指数函数 $\Phi(x) = e^{xA}$ 是常系数齐次线性微分方程组 (3.2.12) 的一个标准基解矩阵, 即 $\Phi(x)$ 是基解矩阵且 $\Phi(0) = E$.

证: 在自变量 x 的任意有限区间上, 易知矩阵指数函数:

$$e^{xA} = E + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}A^k + \cdots,$$

是一致收敛的, 而且可以利用逐项微分法则, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{xA} = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \cdots \\ &= A \left(E + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \cdots \right) \\ &= A e^{xA} = A \Phi(x), \end{aligned}$$

这说明 $\Phi(x)$ 是方程组 (3.2.12) 的一个解矩阵.

另外, 由于 $\Phi(0) = E$, 所以 $\det \Phi(0) = 1$. 这就证明了 $\Phi(x)$ 是方程组 (3.2.12) 的一个基解矩阵, 且是标准的.

由此即得到如下推论.

推论 3.2.1 常系数非齐次线性微分方程组 (3.2.11) 在区间 (a, b) 上的通解为:

$$y = e^{xA} C + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} f(s) ds,$$

其中, C 为一任意的常数列向量; 而方程组 (3.2.12) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为:

$$y = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} f(s) ds,$$

其中, $x_0 = (a, b)$.

现在, 要进一步解决的问题是, 这种用矩阵无穷级数定义的指数函数 e^{xA} , 是否可以用初等函数的有限形式表达出来, 如果可能的话, 应该怎样计算它呢? 先看下面的两个例子.

例 3.2.1 假设:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

为一个对角矩阵, 则不难推出:

$$\begin{aligned}
 e^{xA} &= \mathbf{E} + x \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
 &= \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & & & \\ & e^{a_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n x} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

例 3.2.2 设:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

试求 e^{xA} .

解: 容易看出, 矩阵 A 可以分解为两个矩阵之和:

$$A = E + Z,$$

其中, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为单位矩阵, 而 $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为幂零矩阵(即它的某一方幂为零矩阵).

由于单位矩阵与任一矩阵是可交换的, 则

$$e^{xA} = e^{x(E+Z)} = e^{xE} e^{xZ}, \quad (3.2.14)$$

另外, 利用例 3.2.1 的结果, 对于单位矩阵 E , 有

$$e^{xE} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} = e^x E \quad (3.2.15)$$

幂零矩阵的指数函数展开式实际上是一个有限和. 这是解决问题的关键所在. 这样, 最后就得到:

$$e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

进行如此细致的分析, 是因为它的方法有普遍意义. 大家知道, 任一矩阵 A 在相似变换下都可以化成它的约当(Jordan)标准形 J , 而 J 的每一约当块又都可以分解成矩阵 λE 和一个幂零矩阵之和. 因此, e^{xJ} 可以表示成初等函数有限和的形式. 另一方面, e^{xA} 和 e^{xJ} 之间可以建立联系. 下面就对刚才的说法进行详细证明.

3.2.3 利用约当标准型求基解矩阵

根据一般线性代数教科书的结果, 对于每一个 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶非奇异矩阵 P , 使得

$$A = PJP^{-1},$$

其中,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix},$$

为约当标准形. 假设约当块:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

是 n_i 阶的, $i=1, 2, \dots, m; n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, 则 J_i 有如下分解式:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中, 右侧第一个矩阵具有 $\lambda_i \mathbf{E}$ 的形式, 而第二个矩阵是幂零的(它的 n_i 次幂为零矩阵). 由于矩阵 $\lambda_i \mathbf{E}$ 与任何矩阵都可交换, 因此

$$\begin{aligned} e^{xJ_i} &= e^{\lambda_i x} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{E} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \dots \right\} \\ &+ \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} e^{\lambda_i x} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此得到它的初等函数有限和的形式, 即

$$e^{xJ} = e^{\lambda_i x} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.16)$$

其中, $i=1, 2, \dots, m$. 再用例 3.2.2 的方法容易得到:

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}.$$

另外:

$$e^{xA} = e^{P \lambda J P^{-1}} = P e^{xJ} P^{-1}, \quad (3.2.17)$$

公式(3.2.17)提供了实际计算方程组(3.2.12)的基解矩阵 e^{xA} 的一个方法. 另外, 利用 P 的

可逆性和前面介绍的推论知道 $e^{xA}P$ 也是方程组 (3.2.12) 的一个基解矩阵, 而且由式 (3.2.17) 得到:

$$(e^{xA})P = Pe^{xJ} \quad (3.2.18)$$

即:

$$e^{xA}P = P \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}, \quad (3.2.19)$$

其中, $e^{xJ_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ 由式 (3.2.16) 给出. 从式 (3.2.18) 或式 (3.2.19) 来求方程组 (3.2.12) 的基解矩阵, 与式 (3.2.17) 相比, 可以避免求逆矩阵并减少一次矩阵乘法的运算. 尽管如此, 求约当标准型 J 及过渡矩阵 P 的计算量一般仍很大, 所以有必要寻找比较简便的替代方法——待定指数函数法.

现在, 可把上面的理论分析所得到的形式即式 (3.2.19) 应用于待定指数函数法, 直接求得方程组 (3.2.12) 的相应基解矩阵. 首先, 由于矩阵 A 的约当标准型依赖于它的特征根的重数, 将区分两种不同的情况.

1. A 只有单的特征根

设 A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为单根, 因此它们互不相同, 则 A 的约当标准型 J 就是一个对角矩阵, 由式 (3.2.18) 得到相应的基解矩阵:

$$\Phi(x) = e^{xA}P = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & \\ & e^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix},$$

注意, $\Phi(0) = P$. 由此可见:

$$e^{xA} = \Phi(x)\Phi^{-1}(0). \quad (3.2.20)$$

因此, 问题归于如何确定矩阵 P . 令 r_i 表示 P 的第 i 列的向量, 则基解矩阵为:

$$\Phi(x) = [e^{\lambda_1 x} r_1, e^{\lambda_2 x} r_2, \dots, e^{\lambda_n x} r_n],$$

它告诉我们方程组 (3.2.12) 有如下形式的解:

$$e^{\lambda_i x} r_i,$$

其中, r_i 是一个待定的常数列向量. 下面的引理给出了一个求 r_i 的方法.

引理 3.2.3 微分方程组 (3.2.12) 有非零解 $y = e^{\lambda x} r$, 当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征根, 且 r 是与 λ 相应的特征向量.

证: 由代入法推出 $y = e^{\lambda x} r$ 是微分方程组 (3.2.12) 的解, 当且仅当:

$$\lambda e^{\lambda x} r = A e^{\lambda x} r, \quad \forall x \in (a, b),$$

它等价于求齐次线性方程组:

$$(A - \lambda E)r = 0,$$

的非零解 r , 即与 A 的特征根 λ 相应的特征向量.

定理 3.2.2 设 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则矩阵函数:

$$\Phi(x) = [e^{\lambda_1 x} r_1, e^{\lambda_2 x} r_2, \dots, e^{\lambda_n x} r_n],$$

是方程组(3.2.12)的一个基解矩阵, 其中 \mathbf{r}_i 是 \mathbf{A} 的与 λ_i 相应的特征向量.

证: 由引理, $\Phi(x)$ 是方程组(3.2.12)的解矩阵. 另一方面, 由线性代数的结果, 对应于不同特征根的特征向量组是线性无关的, 所以:

$$\det \Phi(0) = \det(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n) \neq 0.$$

再由朗斯基行列式的性质可知, $\Phi(x)$ 是微分方程组(3.2.12)的一个基解矩阵.

【附注1】

定理 3.2.3 设 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n$ 是矩阵 \mathbf{A} 的 n 个线性无关的特征向量, 则矩阵函数:

$$\Phi(x) = [e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, \cdots, e^{\lambda_n x} \mathbf{r}_n],$$

是方程组(3.2.12)的一个基解矩阵, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 \mathbf{A} 的与 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n$ 相应的特征根, 它们不必互不相同.

【附注2】

虽然 \mathbf{A} 是实矩阵, 但它有可能有(共轭的)复特征根, 矩阵 $\Phi(x)$ 可能是复的. 但是, 当 \mathbf{A} 为实矩阵时, 矩阵 $e^{x\mathbf{A}}$ 是实的. 因此, 可以利用公式(3.2.20), 从复矩阵 $\Phi(x)$ 得到所需的实基解矩阵 $e^{x\mathbf{A}}$.

由于在公式(3.2.20)中需要计算逆矩阵 $\Phi^{-1}(0)$, 这在应用上并不是太方便的(特别当 n 较大时). 下面再介绍一个从复值解求实值解的方法.

设微分方程(3.2.12)有一个复值解:

$$y_1 = u(x) + iv(x),$$

则在方程(3.2.12)两侧取共轭易知, y_1 的共轭为:

$$y_2 = u(x) - iv(x),$$

也是微分方程(3.2.12)的一个复值解. 从而它们的实部 $u(x) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ 和虚部 $v(x) =$

$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$, 都是方程(3.2.12)的实值解. 不难看出, 用这种方法可把解矩阵 $\Phi(x)$ 中所有复值解都换成实值解, 最后得到 n 个线性无关的实值解.

例 3.2.3 求微分方程组:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} y$$

的通解.

解: 容易算出:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 3\lambda(1 - \lambda^2).$$

因此矩阵 \mathbf{A} 有特征根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. 通过计算知, 相应的特征向量可以取为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此, 所求的通解为:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

其中, C_1, C_2 和 C_3 为任意常数.

2. A 有重的特征根

假设矩阵 A 的互不相同的特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 而相应的重数分别为正整数 n_1, \dots, n_s , ($n_1 + \dots + n_s = n$). 在 A 的约当标准型 J 中, 与 λ_i 对应的约当块可能不止一个, 这些约当块的阶数之和为 n_i , ($i=1, \dots, s$). 从式(3.2.19)可以推出, 在方程组(3.2.12)的基解矩阵 $e^{xA}P$ 的所有列向量中, 与 λ_i 相关的 n_i 列都具有下列形式:

$$y = e^{\lambda_i x} \left(r^0 + \frac{x}{1!} r_1 + \frac{x^2}{2!} r_2 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1} \right), \quad (3.2.21)$$

其中, r_j ($j=0, 1, \dots, n_i-1$) 是 n 维常数列向量. 下面的引理给出了确定诸 r_j 的方法.

引理 3.2.4 设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征根, 则方程组(3.2.12)有形如式(3.2.21)的非零解的充要条件是: r_0 是齐次线性代数方程组:

$$(A - \lambda_i E) r_0 = 0, \quad (3.2.22)$$

的一个非零解, 而且式(3.2.21)中的 r_1, \dots, r_{n_i-1} 是由下面的关系式逐次决定的:

$$\begin{cases} r_1 = (A - \lambda_i E) r_0 \\ r_2 = (A - \lambda_i E) r_1 \\ \dots \\ r_{n_i-1} = (A - \lambda_i E) r_{n_i-2}, \end{cases} \quad (3.2.23)$$

定理 3.2.4 设 n 阶实值矩阵 A 在复域中互不相同的特征根是 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 而相应的重数分别为正整数 n_1, \dots, n_s , ($n_1 + \dots + n_s = n$). 则常系数齐次线性微分方程组(3.2.12)有基解矩阵 $\Phi(x)$, 为:

$$[e^{\lambda_1 x} P_1^{(1)}(x), \dots, e^{\lambda_1 x} P_{n_1}^{(1)}(x); \dots; e^{\lambda_s x} P_1^{(s)}(x), \dots, e^{\lambda_s x} P_{n_s}^{(s)}(x)]$$

其中,

$$P_j^i = r_{j0}^i + \frac{x}{1!} r_{j1}^i + \frac{x^2}{2!} r_{j2}^i + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{jn_i-1}^{(i)},$$

是与 λ_i 相应的第 j 个向量多项式 ($i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, n_i$), 而 $r_{10}^{(i)}, \dots, r_{n_0}^{(i)}$ 是齐次线性代数方程组(3.2.22)的 n_i 个线性无关解, 且 $r_{jk}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, n_i; k=1, 2, \dots, n_i-1$) 是把 $r_{jk}^{(i)}$ 代替式(3.2.23)中的 r_0 而依次得到的 r_k .

此外, 当所得出的 $\Phi(x)$ 是复值时, 可利用本节附注2所述的方法从 $\Phi(x)$ 中提取实值基解矩阵.

例 3.2.4 求解微分方程组:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} y.$$

解: 由于

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 5)(\lambda^2 - 4\lambda + 5),$$

因此矩阵 A 有单重特征根 5 和单重共轭特征根 $2+i$ 和 $2-i$. 求出与这三个特征根相应的特征向量, 并把它们分别作为列向量, 就可得到一个基解矩阵:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2e^{5x} & (3+i)e^{(2+i)x} & (3-i)e^{(2-i)x} \\ 0 & (2-i)e^{(2+i)x} & (2+i)e^{(2-i)x} \\ e^{5x} & -2e^{(2+i)x} & -2e^{(2-i)x} \end{pmatrix},$$

采取本节附注 2 所述的方法, 从 $\Phi(x)$ 的第二(或第三)列提取实部与虚部, 再与第一列合在一起, 就得到一个实值基解矩阵.

$$\widetilde{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} -2e^{5x} & (3\cos x - \sin x)e^{2x} & (\cos x + 3\sin x)e^{2x} \\ 0 & (2\cos x + \sin x)e^{2x} & (-\cos x + 2\sin x)e^{2x} \\ e^{5x} & -2\cos e^{2x} & -2\sin e^{2x} \end{pmatrix},$$

也可以直接验证:

$$|\widetilde{\Phi}(0)| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

不等于零. 所以, 所求通解为:

$$y = \widetilde{\Phi}(x)C,$$

其中, C 为三维的任意常数列向量.

习题

1. 求常系数齐次线性微分方程组(3.2.12)的通解, 其中的矩阵 A 分别为

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 求出常系数非齐次线性微分方程组(3.2.11)的通解, 其中:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix};$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 2-x \\ 0 \\ 1-x \end{pmatrix};$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix}.$$

3. 求出微分方程组(3.2.11)满足初始条件 $y(0) = \eta$ 的解, 其中:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 38 \\ -9 & -7 & -18 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ -3e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 证明: 常系数齐次线性微分方程组(3.2.12)的任何解当 $x \rightarrow \infty$ 时都趋于零, 当且仅当它的系数矩阵 \mathbf{A} 的所有特征根都具有负的实部.

3.3 高阶线性方程

本节讨论仅含一个未知函数 $y = y(x)$ 的 n 阶线性微分方程:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (3.3.24)$$

其中 $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 和 $f(x)$ 都是区间 $a < x < b$ 上的连续函数.

当 $f(x) \neq 0$ 时, 称式(3.3.24)为非齐次线性方程组. 当 $f(x) \equiv 0$ 时:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (3.3.25)$$

称为与方程(3.3.24)相应的齐次线性微分方程. 如果引进新的未知函数:

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)},$$

方程(3.3.24)等价于下面的线性方程组:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{f}(x), \quad (3.3.26)$$

其中,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

而线性微分方程组也相应地转换成:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}, \quad (3.3.27)$$

这样本章前两节的结果都可以应用到方程组(3.3.26)和方程组(3.3.27)上来. 而且微分方程(3.3.24)满足初值条件:

$$y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

的解在 $a < x < b$ 上存在且唯一.

3.3.1 高阶线性方程的一般理论

假设函数组

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

分别是齐次线性微分方程(3.3.25)的 n 个解, 则方程组(3.3.24)的 n 个相应解:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

它们的朗斯基行列式为:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

引理 3.3.1 $n-1$ 阶可微的向量函数组:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

在区间 $a < x < b$ 上线性相关的充要条件是向量函数组在 $a < x < b$ 上线性相关.

证明留给读者.

定理 3.3.1 齐次方程(3.3.25)的 n 个解:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

在其定义区间 $a < x < b$ 线性无关(相关)的充要条件是存在点 x_0 , 使得它们的朗斯基行列式 $W(x_0) \neq 0$ ($W(x_0) = 0$).

定理 3.3.2 如果:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x),$$

是齐次方程(3.3.25)的 n 个线性无关解, 则:

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \cdots + C_n \varphi_n(x),$$

是方程(3.3.25)的通解, 其中 C_1, C_2, \cdots, C_n 任意常数.

定理 3.3.3 方程(3.3.25)的解组:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x),$$

线性无关的充要条件是它的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $a < x < b$ 上恒不为零.

把齐次线性微分方程的 n 个线性无关解称为一个基本解组. 而由朗斯基行列式可以判断一个解组是否为基本解组.

最后, 讨论齐次方程(3.3.25)的解与它的系数之间的关系. 利用线性微分方程组(3.3.27)中矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 的特点, $\text{tr} \mathbf{A}(x) = -a_1(x)$, 刘维尔公式就可以取比较简单的形式.

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(s) ds}, \quad (3.3.28)$$

其中, $W(x)$ 是线性方程(3.3.25)的解组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的朗斯基行列式, $x_0 \in (a, b)$. 特别对于二阶齐次线性微分方程, 可以利用刘维尔公式, 由它的一个非零解导出它的

通解.

例 3.3.1 设 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (3.3.29)$$

的一个非零解, 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $a < x < b$ 上的连续函数, 则方程的通解:

$$y = \varphi(x) \left[C_1 + C_2 \int \frac{1}{\varphi^2(x)} e^{-\int p(x) dx} dx \right],$$

其中, C_1 和 C_2 为任意常数.

证: 假设 $y = \varphi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上恒不为零. 设 $y = y(x)$ 是方程 (3.3.29) 的任意解, 则由刘维尔公式 (3.3.28), 有

$$\begin{vmatrix} \varphi & y \\ \varphi' & y' \end{vmatrix} = C e^{-\int p(x) dx}.$$

即 $\varphi y' - \varphi' y = C e^{-\int p(x) dx}$, 以积分因子 $\frac{1}{\varphi^2}$ 乘上式两端, 就可推出:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\varphi} \right) = \frac{C}{\varphi^2} e^{-\int p(x) dx}.$$

积分上式即可. 由于 n 阶非齐次方程 (3.3.24) 等价于一阶非齐次方程组 (3.3.26), 所以由方程组的通解定理可以推出.

定理 3.3.4 n 阶线性非齐次方程的通解等于它的对应齐次方程的通解与本身的一个特解之和.

由此可见, 求方程 (3.3.24) 的通解问题就归结为求它的一个特解和对应齐次线性方程的通解问题; 和一阶非齐次线性微分方程组一样, 对于非齐次线性方程 (3.3.24) 也能够由对应齐次方程的一个基本解组求出它本身的一个特解. 即常数变易法.

例 3.3.2 求非齐次方程 $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ 的通解.

解: 易于验证函数 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的解, 且它们的朗斯基行列式恒不为零, 因此这两个函数是线性无关的, 即是一基本解组. 故相应齐次方程的通解为:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

现求已知方程形如:

$$y_1 = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

的一个特解. 将 y_1 代入非齐次方程, 则 $C'_1(x)$, $C'_2(x)$ 满足:

$$C'_1(x) \cos x + C'_2(x) \sin x = 0,$$

$$-C'_1(x) \sin x + C'_2(x) \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

解上述方程得:

$$C'_1(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, C'_2(x) = 1,$$

积分得:

$$C_1(x) = \ln |\cos x|, C_2(x) = x,$$

故已知方程的通解为:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

3.3.2 常系数线性齐次方程的解法

本节讨论 n 阶常系数线性齐次微分方程:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (3.3.30)$$

的求解问题, 这里:

$$a_1, \cdots, a_n$$

为实常数. 方程(3.3.30)的求解关键是求出其基本解组. 一个自然的方法就是把它转化为与之等价的一阶线性常系数齐次微分方程组, 但是这样的推导过程并不简洁, 因此这里用待定指数函数法求解. 首先看一个简单的方程:

$$y' + ay = 0, \quad (3.3.31)$$

其中, a 是常数, 不难求出它有特解 $y = e^{-ax}$, 比较方程(3.3.30)和方程(3.3.31), 可以猜想方程(3.3.30)也有形如:

$$y = e^{\lambda x},$$

的解, 其中 λ 是待定常数. 将它代入方程(3.3.30)中得到:

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0$$

因为 $e^{\lambda x} \neq 0$, 所以有:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.3.32)$$

称方程(3.3.32)为方程(3.3.30)的特征方程, 它的根称为特征根. 这样, $y = e^{\lambda x}$ 是方程(3.3.30)的解, 当且仅当 λ 是特征方程(3.3.32)的根时.

1. 特征根是单根的情形

定理 3.3.5 若特征方程(3.3.32)有 n 个互异根:

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

则:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x}, \quad (3.3.33)$$

是方程(3.3.30)的一个基本解组.

证: 显然

$$y_i = e^{\lambda_i x}, (i = 1, 2, \cdots, n),$$

分别是方程(3.3.30)的解, 它们的朗斯基行列式:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} \prod (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0, x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

从而:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

是方程(3.3.30)的基本解组.

例 3.3.3 求方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, 故所求得通解为:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

当特征方程有复根时, 它的复根一定共轭并成对出现, 如 $\lambda_k = a + ib$ 是特征方程(3.3.32)的根, 则 $\lambda_{k+1} = a - ib$ 也是方程(3.3.32)的特征根. 这两个特征根所对应的解是实变量复值函数 $y_k = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx$, $y_{k+1} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} \cos bx - ie^{ax} \sin bx$ 我们可以按照常系数线性方程组同样的处理方法, 把这两个复值解实值化, 即取实部 $e^{ax} \cos bx$ 和虚部 $e^{ax} \sin bx$ 作为这两个根所对应的解.

2. 特征根有重根的情形

定理 3.3.6 设常系数齐次线性微分方程(3.3.30)的特征方程(3.3.32)在复数域中共有 s 个互不相同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 而且相应的重数分别为 n_1, \cdots, n_s , ($n_1 + \cdots + n_s = n$), 则函数组:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}; \cdots; e^{\lambda_s x}, x e^{\lambda_s x}, \cdots, x^{n_s-1} e^{\lambda_s x} \quad (3.3.34)$$

是微分方程的(3.3.30)的一个基本解组.

例 3.3.4 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda = -2$ 是二重特征根, 故所求得通解是:

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x).$$

例 3.3.5 求微分方程 $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 6y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为:

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 (\lambda^2 + 1) = 0,$$

$\lambda = 1$ 是三重特征根, 而 $\lambda = \pm i$ 是一对共轭复根, 所以基本解组是:

$$e^x, x e^x, x^2 e^x, \cos x, \sin x,$$

所以, 原方程的通解是:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

3.3.3 常系数线性非齐次方程的解法

本节研究 n 阶常系数线性非齐次方程:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (3.3.35)$$

的解法.

我们已经知道方程(3.3.35)的通解等于它的对应齐次方程的通解和它本身的一个特解之和. 我们已经掌握了齐次方程通解的求法, 现在问题是如何求它的一个特解. 其主要方法有两种, 一种是常数变易法, 这是求非齐次方程特解的一般方法. 下面介绍第二种方法, 即待定系数法, 这种方法计算比较方便, 但是只适用于非齐次项的某些情形.

1. 非齐次项 $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$

这里 $P_m(x)$ 表示 x 的 m 次多项式, 则方程(3.3.35)具有如下形式的特解:

$$\varphi^*(x) = Q_m(x) e^{\alpha x},$$

其中 m 次多项式 $Q_m(x)$ 的系数待定. 当 α 不是其对应齐次线性微分方程的特征方程的特征根时, 把上述形式的特解 $\varphi^*(x)$ 代入相应的方程 (3.3.35), 就可以确定 $Q_m(x)$ 的系数, 从而得到所求的特解 $\varphi^*(x)$; 当 α 是 k 重特征根时, 则令特解:

$$\varphi^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}.$$

例 3.3.6 求方程 $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征方程为:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

特征根 $\lambda_{1,2} = 2$, 所以齐次方程的通解为:

$$y = e^{2x} (C_1 + C_2 x).$$

由于 $\alpha = 2$ 是二重特征根, 故已知非齐次方程有形如 $y_1 = Ax^2 e^{2x}$ 的特解. 将它代入已知方程, 比较 x 同次幂的系数, 得 $A = 1$, 所求通解为:

$$y = x^2 e^{2x} + e^{2x} (C_1 + C_2 x).$$

例 3.3.7 求方程:

$$y'' - y = \frac{1}{2} e^x,$$

的通解.

解: 对应齐次方程的特征方程为:

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

特征根:

$$\lambda = \pm 1,$$

对应齐次方程的通解为:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

由于 $\lambda = 1$ 是特征方程的根, 故已知方程有形如 $y_1 = A x e^x$ 的特解. 将它代入原方程得:

$$2A e^x + A x e^x - A x e^x = \frac{1}{2} e^x,$$

从而:

$$A = \frac{1}{4},$$

故:

$$y_1 = \frac{1}{4} x e^x,$$

由此得通解:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x.$$

2. 非线性项 $f(x) = [A_m(x) \cos \beta x + B_l(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

这里, $A_m(x)$ 和 $B_l(x)$ 分别是 x 的 m 次和 l 次多项式, 则相应特解的形式是:

$$\varphi^*(x) = x^k [C_n(x) \cos \beta x + D_n(x) \sin \beta x] e^{\alpha x},$$

其中的非负整数 k 是特征根 $\alpha \pm i\beta$ 的重数 (当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根时, 取 $k = 0$), 而 n 次多项式

$C_n(x)$ 和 $D_n(x)$ 的系数待定.

例 3.3.8 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ 的通解.

解: 特征方程为:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0,$$

它有二重根 $\lambda = -2$. 因此, 设方程有特解:

$$y^* = a \cos 2x + b \sin 2x,$$

其中, 常数 a 和 b 待定. 把它代入原方程, 得出:

$$8b \cos 2x - 8a \sin 2x = \cos 2x,$$

由此推出 $a = 0$, $b = \frac{1}{8}$. 所以, 原方程的通解为:

$$y = (C_1 + C_2(x))e^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x.$$

习题

1. 考虑微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 其中 $p(x), q(x)$ 是区间 $a < x < b$ 上的连续函数, 当系数满足什么条件时, 其基本解组的朗斯基行列式等于常数.

2. 微分方程 $y'' + q(x)y = 0$.

(1) 设 $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ 是它的任意两个解, 试证 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式等于一个常数.

(2) 设已知方程有一个特解 $y = e^x$, 试求这个方程的通解, 并确定 $q(x)$.

3. 已知方程 $(1 - \ln x)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ 的一个解是 $y_1 = \ln x$, 试求其通解.

4. 求方程 $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ 的通解, 已知它的两个特解 $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

5. 设 $y_1(x)$ 是 n 阶线性齐次方程:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的一个非零解. 试证明: 利用线性变换 $y = y_1(x)z$ 可将已知方程化为 $n-1$ 阶的齐次方程.

6. 用常数变易法求方程的通解 $y'' - y = \frac{2e^x}{e^{x-1}}$.

7. 求下列齐次方程的通解.

(1) $2y'' - 4y' - 6y = 0;$

(2) $y''' + 3y' - 4y = 0;$

(3) $y''' - y'' - y' + y = 0;$

(4) $y^4 - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0;$

(5) $y^4 - y'' = 0;$

(6) $y^5 + 2y''' + y' = 0.$

8. 求下列方程满足给定初值条件的解.

(1) $y'' + y' = 0; y(0) = 2, y'(0) = 5;$

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0; y(2) = 4, y'(2) = 0.$

9. 求下列非齐次方程的通解.

(1) $y'' + 4y = 8;$

- (2) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$;
 (3) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$;
 (4) $y'' + y' - 2y = 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 (5) $y'' - 2y' + 10y = x \cos 2x$;
 (6) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$.

3.4 拉普拉斯变换

从理论上说, 线性常系数微分方程组或高阶方程的通解总能求得, 但是都必须先求对应的齐次方程的通解, 然后再找非齐次方程的特解. 这在寻求满足初值条件的解的时候比较麻烦. 这一节我们介绍一种简便的方法, 即拉普拉斯变换法. 因为它无须先求出已知方程的通解, 可直接求出它的特解来.

这一方法的思想是: 先通过拉普拉斯变换将已知方程化成代数方程, 求出代数方程的解, 再通过拉普拉斯逆变换即查拉普拉斯变换表, 便可得到所求初值问题的解.

定义 3.4.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有定义, 如果含参变量 s 的无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

对 s 的某一取值范围是收敛的, 则称:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.4.36)$$

为函数的拉普拉斯变换, $f(t)$ 称为原函数, $F(s)$ 称为象函数, 并记为:

$$L[f(t)] = F(s).$$

在拉普拉斯变换的一般理论中, 积分式 (3.4.36) 的参变量 s 是复数. 为简单起见假设 s 是实数.

定理 3.4.1 如果函数 $f(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上逐段连续, 且存在数 $M > 0$, $s_0 \geq 0$, 使得对于一切 $t \geq 0$ 有 $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, 则当 $s > s_0$ 时, $F(s)$ 存在.

证: 当 $s > s_0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0} \end{aligned}$$

例 3.4.1 求函数 $f(t) = 1$, $f(t) = t$ 的拉普拉斯变换.

解:

$$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$L[t] = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}, s > 0$$

例 3.4.2 求函数 $f(t) = e^{at}$ 的拉普拉斯变换.

解:

$$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s-a}, s > a$$

由以上两个例子可以看出 $F(s)$ 的定义域是随 $f(t)$ 改变的. 拉普拉斯变换还满足如下几条性质.

(1) 线性性质:

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)],$$

其中, a, b 是常数.

(2) 原函数的微分性质:

如果 $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ 均满足定理(3.4.3)的条件, 则:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

(3) 象函数的微分性质:

如果 $L[f(t)] = F(s)$, 则:

$$F^n(s) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} f(t) dt = (-1)^n L[t^n f(t)].$$

例 3.4.3 求解初值问题 $y'' + y = \sin 2t$; $y(0) = (0)$, $y'(0) = 1$.

解: 在方程两边取拉普拉斯变换, 并利用它们的线性性质有:

$$L[y''] + L[y] = L[\sin 2t],$$

设 $L[y] = Y(s)$, 则:

$$[s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0)] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4},$$

再把给定的初值条件代入, 可以推出:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{5}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)},$$

通过反查拉普拉斯变换表:

$$L^{-1}[Y(s)] = \frac{5}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] - \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4}\right] = \frac{5}{3}\sin 1t - \frac{1}{3}\sin 2t,$$

即所求初值问题的解为:

$$y(t) = \left(\frac{5}{3}\right)\sin 1t - \left(\frac{1}{3}\right)\sin 2t, (0 \leq t < \infty).$$

例 3.4.4 求解初值问题:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}; y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

解: 设 $L[y] = Y(s)$, 在方程两边取拉普拉斯变换, 分别得到:

$$L[y'' - 3y' + 2y] = L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = Y(s)[s^2 - 3s + 2] = Y(s)(s-1)(s-2),$$

$$L[2e^{3t}] = \frac{2}{s-3},$$

所以:

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)s-3},$$

使用部分分式法, 可得:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-3},$$

通过反查拉普拉斯变换表, 所求的初值解为:

$$y(t) = e^t - 2e^{2t} + 3e^{3t}.$$

习题

用拉普拉斯变换解方程的初值问题.

- (1) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = 0;$
- (2) $y'' - 2y' + y = te^t, y(0) = 0, y'(0) = 0;$
- (3) $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1;$
- (4) $y'' + \omega^2 y = \cos 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0;$
- (5) $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, y(0) = -1, y'(0) = -2.$

3.5 高阶微分方程的应用

这一节我们介绍高阶微分方程的一些应用, 包括机械振动、LRC 电路.

3.5.1 机械振动

在日常生活和工程技术中, 很多机械振动问题都归结为弹性振动的研究, 如单摆、汽车上的减震器、重型机械中的后座装置等. 下面我们介绍弹簧振动的例子.

设有一个弹簧, 它的上端固定, 下端挂一个质量为 m 的物体, 当物体处于静止状态时, 作用在物体上的重力与弹力大小相等、方向相反. 这个位置就是物体的平衡位置. 当物体处于平衡位置时, 受到向下的重力为 mg 和弹簧向上的弹力 kl 的作用, 其中 k 是弹簧的弹性系数, l 是弹簧受重力 mg 作用后向下拉伸的长度, 即:

$$kl = mg.$$

为了研究物体的运动规律, 选取平衡位置为坐标原点, 取 x 轴垂直向下. 从而当物体处于平衡位置时, 有 $x=0$, 但当物体受到外力 $F(t)$ 作用时, 从平衡位置开始运动, $x(t)$ 表示物体在 t 时的位置, 当物体开始运动时, 受到下面四个力的作用.

(1) 物体的重力 $W = mg$, 方向是向下的, 与坐标轴的方向一致.

(2) 弹簧的弹力 R , 当 $l+x>0$ 时, 弹力与 x 轴方向相反, 即 $R = -k(l+x)$. 当 $l+x<0$ 时, 弹力与 x 轴方向相同, 即 $R = -k(l+x)$. 因此, 弹簧的弹力 R 总有:

$$R = -k(l+x).$$

(3) 空气阻力 D , 物体在运动过程中总会受到空气阻力或其他介质的阻力作用, 使振动逐渐减弱, 阻力的大小与物体的运动速度成正比, 方向与运动的方向相反, 阻力系数为 c , 在时刻 t 物体的运动速度为 $\frac{dx}{dt}$, 因此:

$$D = -c \frac{dx}{dt},$$

(4) 物体在运动过程中还受到随时间变化的外力作用 $F(t)$, 方向可能向上, 可能向下, 依赖于 $F(t)$ 的正负.

根据受力情况的分析, 由牛顿第二定律得:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = W + R + D + F = mg - k(l+x) - c \frac{dx}{dt} + F(t) = -kx - c \frac{dx}{dt} + F(t),$$

因此, 物体的运动满足二阶线性微分方程:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

1. 无阻尼自由振动

我们首先研究没有空气阻力和外力作用的弹簧振动,称为无阻尼自由振动,此时运动方程为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

这里 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, 方程的通解为:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

其中, c_1, c_2 为常数. 为了使物理意义更明确, 令:

$$\sin \theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \cos \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

因此, 若取 $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\theta = \arctan \frac{c_1}{c_2}$, 则 $x(t)$ 可以写成:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega_0 t \right) \\ &= A (\sin \theta \cos \omega_0 t + \cos \theta \sin \omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \theta). \end{aligned}$$

由上式可以看出, 物体的运动是周期振动, 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, 这种运动称为简谐振动.

2. 有阻尼的自由振动

现在我们考虑由空气阻力而无外力作用的弹簧振动, 此时运动方程变为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

上面方程的特征方程为 $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, 特征根为:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m},$$

下面我们分三种情况考虑方程的解.

(1) $c^2 - 4km > 0$, 在这种情况下 λ_1 和 λ_2 是两个不同的负实数, 因此, 方程的通解为:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t};$$

(2) $c^2 - 4km = 0$, 在这种情况下, 方程的通解为:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right);$$

(3) $c^2 - 4km < 0$, 此时方程的通解为:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right) (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t), \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}.$$

情形(1)称为大阻尼情形,情形(2)称为临界阻尼情形,情形(3)称为小阻尼情形. 对于情形(3),类似于无阻尼自由振动,我们可把方程的通解写为:

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right) \sin(\mu t + \theta).$$

其中, A, θ 为任意常数.

可见, 弹簧的振动已不是周期的, 振动的最大偏离 $A \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right)$ 随时间增加而不断减小, 最后趋于平衡位置 $x=0$.

3. 有阻尼强迫振动

如果物体在运动过程既有空气阻力又有周期外力 $F(t)$ 作用, 设 $F(t) = F_0 \cos \omega t$, 则弹簧振动的方程为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t, \quad (3.5.37)$$

我们可求得方程(3.5.37)的一个特解为:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2} [(k - m\omega^2) \cos \omega t + c\omega \sin \omega t] \\ &= \frac{F_0 \sin(\omega t + \theta)}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

这里 $\tan \theta = \frac{k - m\omega^2}{c\omega}$, 因此, 方程(3.5.37)的通解为:

$$x(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \varphi(t) + \frac{F_0 \sin(\omega t + \theta)}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.5.38)$$

这里 $\varphi(t)$ 是方程(3.5.37)对应的齐次方程:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

的通解, 由式(3.5.38)可以看出, 弹簧的振动由两部分叠加而成: 第一部分是阻尼的自由振动, 它是系统本身的固有振动, 它随时间的延续而衰减, 最后等于零; 第二部分是由外力而引起的强迫振动项, 它的振幅不随时间的延续而衰减, 当时间充分大时, 方程(3.5.37)的解 $x(t)$ 最终趋向于解 $\psi(t)$.

4. 无阻尼强迫振动

现在考虑没有空气阻力而有周期性外力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 作用的弹簧振动, 此时, 物体的运动满足方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

当 $\omega \neq \omega_0$ 时, 有通解:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$

它是两个不同周期函数的和.

当 $\omega = \omega_0$ 时, 外力的频率 $\frac{\omega}{2\pi}$ 与弹簧振动的固有频率 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 是相等的, 这种现象称为共振现象, 此时, 弹簧的振动满足的方程为:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t,$$

有通解:

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (3.5.39)$$

c_1, c_2 是任意常数.

式(3.5.39)前面两项的和是一个周期函数, 第三项代表振幅随时间增大而增大的一种振动, 这就是共振现象, 这一项象在许多方面有着不同的应用.

3.5.2 LRC 电路

常微分方程在电路中电流、电压的计算中应用很广泛, 先用电路中各元件上电压、电流等计算公式及回路电压定律、节点电流定律建立起电流或电压所满足的微分方程, 提出相应的初始条件, 再求解所提供的初始值问题, 得到所需要的结果.

设有一个由电阻 R 、电感为 L 、电容 C 和电源 E 串联组成的电路, 其中 R 、 L 及 C 为常数, 电源电动势是时间 t 的函数 $E = E_m \sin \omega t$, 这里 E_m 及 ω 也是常数.

设电路中的电流为 $I(t)$, 电容器极板上的电量为 $Q(t)$, 两极板间的电压为 U_0 , 电感电动势 E_l , 由电学知识知道:

$$I = \frac{dQ}{dt}, U_0 = \frac{Q(t)}{C}, E_l = L \frac{dI}{dt}.$$

由回路电压定律知:

$$E(t) = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q(t)}{C},$$

即有:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t).$$

这就是串联电路的振荡方程.

例 3.5.1 在由一个电阻 R 、电感 L 、电容 C 和电源 E 组成的闭合回路中, 电源的电动势 $E = 100 \sin 60t$ (V), 电阻 $R = 2$ (Ω), 电感 $L = 0.1$ (H), 电容 $C = \frac{1}{260}$ (F). 如果开始时电路中的电流为零, 电容器上的电荷量为零, 求该电路接通后电容器上的电荷量随时间变化的规律.

解: 设 t 时刻该回路中的电流为 $I(t)$, 电容器上的电荷量为 $q(t)$, 由回路电压定律和初始条件得:

$$\frac{1}{10} \times \frac{dI}{dt} + 2I + 260q = 100 \sin 60t,$$

或

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 20 \frac{dq}{dt} + 2600q = 1000 \sin 60t. \quad (3.5.40)$$

$$q(0) = 0, q'(0) = 0.$$

方程(3.5.40)对应的齐次方程的特征方程为:

$$\lambda^2 + 20\lambda + 2600 = 0,$$

这个特征方程的两个根为 $\lambda_1 = -10 + 50i$, $\lambda_2 = -10 - 50i$. 方程(3.5.40)对应的齐次方程的通解为:

$$q_c(t) = e^{-10t} (c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t),$$

现在用待定系数法来求方程(3.5.40)的一个特解. 设特解为:

$$q_p(t) = A \sin 60t + B \cos 60t,$$

将它代入方程(3.5.40)的两边, 分别比较 $\sin 60t$ 和 $\cos 60t$ 的系数, 得:

$$A = -\frac{25}{61}, B = -\frac{30}{61},$$

故原方程(3.5.40)的通解为:

$$q(t) = e^{-10t} (c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t) - \frac{25}{61} \sin 60t - \frac{30}{61} \cos 60t,$$

利用方程(3.4.40)的初始条件得 $c_1 = \frac{36}{61}$, $c_2 = \frac{30}{61}$. 于是, 该电路中电容器 C 上的电荷量随时间变化的关系为:

$$q(t) = \frac{6}{61} e^{-10t} (6 \sin 50t + 5 \cos 50t) - \frac{25}{61} \sin 60t - \frac{30}{61} \cos 60t.$$

上述机械振动系统与电学系统之间的相似性, 使得它们在各自求解过程的数学运算也完全一致, 因而可以把对于机械振动系统的计算结果照搬到电学系统上, 并可同样研究电路中电流的振荡性质, 如自由振动、阻尼自由振动、强迫振动及共振现象等. 此外, 这种相似性使得用电学系统去模拟振动系统成为可能. 由于电学系统易于实现, 从而, 这种模拟就大大简化了对振动系统的研究.

共振现象有十分广泛的应用. 例如, 在无线电接收机中利用共振进行调谐, 在工业上也有利用共振的振动泵等, 但是, 由于共振现象使得一个系统在不大的周期外力作用下能产生振幅很大的振动, 也可以导致一些灾难发生.

习题

1. 一个重 p kg 的物体挂在弹簧下, 把弹簧拉长 a cm, 再用手把弹簧拉长 A cm 后, 无初速松开, 求弹簧振动规律.

2. 火车沿水平轨道运动, 火车的重量是 p , 机车的牵引力为 F , 运动的阻力 $W = a + bv$, 其中 a, b 是常数, v 是火车的速度, 假设 $t = 0$ 时, $s = 0, v = 0$. 这里 s 表示走过的路程, 试求火车的运动规律 $s(t)$.

3. 设有一边长为 1 m 的正方体浮于静止的水中, 设水的密度为 1000 kg/m^3 , 由观察知此立方体上下振动的周期为 $\frac{1}{2} \text{ s}$, 问它的重量是多少?

4. 有一 LRC 电路, 其中 R、C 并联, 再与 L 及直流电源 E 串联, 试求通过电感 L 得电流 $i(t)$, 假设 $t = 0$ 时, $i(0) = 0$.

3.6 模 型

传染病历来是危害人类健康的大敌,长期以来人类与传染病进行着不屈不挠的斗争.近20年来,国际上传染病的研究进展迅速,大量的数学模型被用于分析各种各样的传染病问题.这些数学模型大多适用于各种传染病一般规律的研究,也有部分针对诸如麻疹、疟疾、肺结核、性病、艾滋病等诸多具体疾病的研究.从传染病的传播机理来看,这些模型涉及接触传播、垂直传播、虫媒传播等不同传播方式,是否考虑疾病的潜伏期、对病人的隔离、因病或因接种而获得的免疫力及免疫力的逐渐消失、是否可以忽略因病死亡率、不同种群间的交叉感染、种群自身不同的增长规律,以及种群的年龄结构、在空间迁移或扩散等因素.从模型的数学结构来看,绝大多数传染病模型是常微分方程组,具有时滞因素的是时滞微分积分方程组或微分方程组.传染病防治优化模型是满足一些方程组的泛函极值问题.

在传染病动力学中,长期以来主要使用的数学模型是所谓的“仓室”(compartment)模型,它的基本思想由 Kermack 与 McKendrick 创立于1927年,但一直到现在仍然被广泛地使用和不断地发展着.下面以他们提出的经典基本模型为例来阐述建立仓室模型的基本思想和有关的基本概念.所谓 SIR 仓室模型,就是针对某类传染病将该地区的人群分为以下三类(即三个仓室):易感者(susceptibles)类,其数量记为 $S(t)$,表示 t 时刻未染病但有可能被该类疾病传染的人数;染病者(infectives)类,其数量记为 $I(t)$,表示 t 时刻已被感染成病人而且具有传染力的人数;移出者(removed)类,其数量记为 $R(t)$,表示 t 时刻已从染病者类移出的人数.设总人口为 $N(t)$,则有:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Kermack 与 McKendrick 的 SIR 模型是一个十分简单粗糙的模型,它的建立基于以下三个基本假设.

(1) 不考虑人口的出生、死亡、流动等种群动力因素.这意味着考虑一个封闭环境而且假定疾病随时间的变化要比出生、死亡随时间的变化显著地多,从而后者可以忽略不计,这样此环境的总人口始终保持不变,即 $N(t) = K$, 或 $K = S(t) + I(t) + R(t)$.

(2) 一个病人一旦与易感者接触就必然具有一定的传染力.这里假设 t 时刻单位时间内一个病人能传染的易感者数目与此环境中易感者总数 $S(t)$ 成正比,比例系数为 β ,从而在 t 时刻单位时间内被所有病人传染的人数(即新病人数)为 $\beta S(t)I(t)$.

(3) 在 t 时刻,单位时间内从染病者类移出的人数与病人数量成正比,比例系数为 γ ,从而单位时间内移出者的数量为 $\gamma I(t)$.显然, γ 是单位时间内移出者在病人中所占的比例,称为移出率,当移出者中仅包含康复者时,移出率又称为恢复率.

对每一个仓室的人口变化率建立平衡方程式,便得到以下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases} \quad (3.6.41)$$

这个模型的具体求解讨论和更为一般的情形我们将在第5章中给出.

现在给出一个较为简单的模型“SIS”模型. 人群只分为两类, S 类和 I 类. 人员的流动形式: $S \rightarrow I \rightarrow S$, 为了假定 $S + I = 1$, 即将 S, I 看做是占总人口的比例.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \\ S + I = 1, S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0; \end{cases} \quad (3.6.42)$$

对于这个方程组, 虽然不是我们前面讲的可解类型的方程组, 但是我们可以利用 $I + S = N$ 化简为:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I - \beta I^2; \\ I(0) = I_0 > 0; \end{cases} \quad (3.6.43)$$

式(3.6.43)是 Bernolli 方程的初值问题, 大家可以自行求解. 我们也可以不求解而直接讨论它们解的性质, 这就是后面要学习的定性理论研究.

第 4 章 定性和稳定性理论简介

在 19 世纪中叶, 通过刘维尔的工作, 人们已经知道绝大多数的微分方程不能用初等积分方法求解. 这个结果对于微分方程理论的发展产生了极大的影响, 使微分方程的研究发生了一个转折. 既然初等积分法有着不可克服的局限性, 那么是否可以不求微分方程的解, 而是从微分方程本身来推断其解的性质呢? 定性理论和稳定性理论正是在这种背景下发展起来的. 前者由法国数学家庞加莱 (Poincare, 1854—1912 年) 在 19 世纪 80 年代所创立, 后者由俄国数学家李雅普诺夫 (Lyapunov, 1857—1918 年) 在同年代所创立. 它们共同的特点就是不求出方程的解的情况下, 直接根据微分方程本身的结构和特点来研究其解的性质. 由于这种方法的有效性, 近一百多年以来它们已经成为常微分方程发展的主流. 本章对定性理论和稳定性理论的一些基本概念和基本方法进行简单介绍.

4.1 稳定性概念

由于非线性方程原则上已求不出解来, 人们不得不放弃传统意义下求通解的一切意图, 而改用定性的方法探讨非线性方程解的一般性态. 定性方法是现代微分方程研究的主导方法, 它能揭示非线性科学当中大量深刻而有趣的现象.

微分方程 Cauchy 问题的初值发生波动是不可避免的, 当初值发生较小的波动时, 是否会引起相应的解的不可容忍的变动, 乃是理论上与实际科学技术活动中都十分关心的问题.

考虑微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (4.1.1)$$

其中, 函数 $f(t, x)$ 对 $x \in D \subseteq R^n$ 和 $t \in (-\infty, +\infty)$ 连续, 对 x 满足局部李普希兹条件. 设方程 (4.1.1) 对初值 (t_0, x_1) 存在唯一解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$, 其他解记做 $x = x(t, t_0, x_0)$. 现在的问题是: 当 $\|x_0 - x_1\|$ 很小时, $\|\varphi(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_0)\|$ 是否也很小? 本章向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的范围取 $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

如果所考虑的解的存在区间是有限闭区间, 那么这是解对初值的连续依赖性, 前面已有结论. 现在要考虑的是如果解的存在区间是无穷区间, 那么解对初值不一定有连续依赖性, 这就产生了李雅普诺夫意义下的稳定性概念.

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \geq 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 只要:

$$\|x_0 - x_1\| < \delta,$$

就有:

$$\|x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

对一切 $t \geq t_0$ 成立, 则称方程 (4.1.1) 的解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是稳定的, 否则是不稳定的.

假设 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是稳定的, 而且存在 $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$, 只要 $\|x_0\|$ 满足:

$$\|x_0 - x_1\| < \delta_1,$$

就有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_0)\|) = 0,$$

则称方程(4.1.1)的解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 是渐近稳定的.

为了简化讨论,通常把解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 的稳定性化成零解的稳定性问题. 下面记 $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_1)$, $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 做如下变量代换:

$$y = x(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_1), \quad (4.1.2)$$

则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = f(t, x(t)) - f(t, \varphi(t)) \\ &= f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)) \\ &= F(t, y), \end{aligned}$$

于是在变换(4.1.2)下,将方程(4.1.1)化成:

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \quad (4.1.3)$$

其中 $F(t, y) = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t))$. 这样关于方程(4.1.1)的解 $x = \varphi(t, t_0, x_1)$ 的稳定性问题就化为方程(4.1.3)的零解 $y=0$ 的稳定性问题了. 因此,我们在下文中只考虑方程(4.1.1)的零解 $x=0$ 的稳定性,即假设 $F(t, 0) \equiv 0$, 并有如下定义.

定义 4.1.1 若对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, 当 $\|x_0\| \leq \delta$ 时对所有的 $t \geq t_0$ 都有:

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad (4.1.4)$$

则称方程(4.1.1)的零解是稳定的,反之是不稳定的.

图 4.1 描绘了 $x \in R^2$ 时,在稳定平衡点附近解轨线的形态. 通过在充分小的球邻域内选取的初始点,我们能够使得对 $t \geq t_0$ 的解曲线的图像全部在已给的圆柱里.

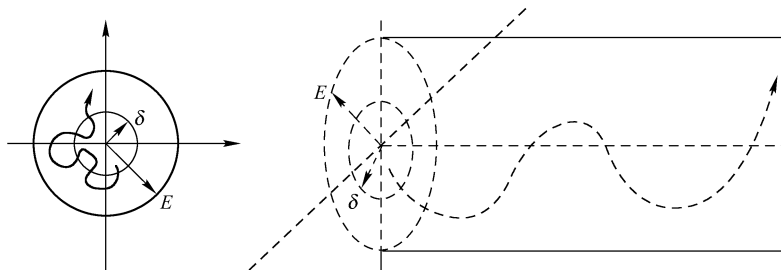


图 4.1 零解稳定的几何意义

定义 4.1.2 若方程(4.1.1)的零解是稳定的,且存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|x_0\| \leq \delta_1$ 时有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0$$

则称方程(4.1.1)的零解是渐近稳定的.

图 4.2 揭示了零解渐近稳定的几何意义.

例 4.1.1 考察系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases}$$

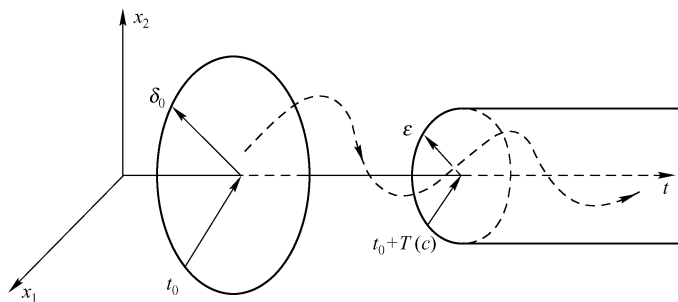


图 4.2 零解渐近稳定的几何意义

零解的稳定性.

解: 对于一切 $t \geq 0$, 方程组满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ 的解为:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t; \\ y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \end{cases}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$ 时, 有:

$$\begin{aligned} (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} &= ((x_0 \cos t + y_0 \sin t)^2 + (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

故该系统的零解是稳定的.

然而, 由于:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0,$$

所以该系统的零解不是渐近稳定的.

例 4.1.2 考察系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x; \\ \frac{dy}{dt} = -y, \end{cases}$$

的零解的稳定性.

解: 在 $t \geq 0$ 上, 取初值为 $(0, x_0, y_0)$ 的解为:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}; \\ y(t) = -y_0 e^{-t}, \end{cases}$$

其中, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

对任一 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$ 时, 有:

$$\begin{aligned} (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} &= ((x_0^2 e^{-2t} + y_0^2 e^{-2t}))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} < \delta = \varepsilon (t \geq 0), \end{aligned}$$

故该系统的零解是稳定的.

然而, 由于:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_0^2 e^{-2t} + y_0^2 e^{-2t})^{\frac{1}{2}} = 0,$$

所以该系统的零解是渐近稳定的.

例 4.1.3 考察系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x; \\ \frac{dy}{dt} = y, \end{cases}$$

的零解的稳定性.

解: 方程组以 $(0, x_0, y_0)$ 为初值的解为:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^t \end{cases}$$

其中, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

$$(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}} = ((x_0^2 e^{2t} + y_0^2 e^{2t}))^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} e^t.$$

由于函数 e^t 随 t 的递增而无限地增大. 因此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 不管 $(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$ 取得怎样小, 只要 t 取得适当大时, 就不能保证 $(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}}$ 小于预先给定的正数 ε , 所以该系统的零解是不稳的.

例 4.1.4 考虑常系数线性微分方程组:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (4.1.5)$$

其中, $x \in R^n$, A 是 $n \times n$ 阵. 证明, 若 A 的所有特征根都具严格负实部, 则方程组(4.1.5)的零解是渐近稳定的.

证: 不失一般性, 我们取初始时刻 $t_0 = 0$, 设 $\phi(t)$ 是方程组(4.1.5)的标准基本解矩阵, 由第3章内容知满足 $x(0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 可写成:

$$x(t) = \phi(t)x_0. \quad (4.1.6)$$

由 A 的所有特征根都具负实部知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0, \quad (4.1.7)$$

于是知存在 $t_1 > 0$, 使 $t > t_1$ 时 $\|\phi(t)\| < \delta$. 从而对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_0 = \varepsilon$, 则当 $\|x_0\| < \delta_0$ 时, 由式(4.1.6)有:

$$\|x(t)\| \leq \|\phi(t)X_0\| \leq \|X_0\| < \varepsilon. \quad (4.1.8)$$

当 $t \in [0, t_1]$ 时, 由解对初值的连续相依性, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|x_0\| < \delta_1$ 时:

$$\|x(t) - 0\| < \varepsilon, \quad t \in [0, t_1],$$

取 $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$, 综合上面讨论知, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时有:

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [0, +\infty],$$

即 $x=0$ 是稳定的. 由式(4.1.7)知对任意 x_0 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)x_0 = 0,$$

故 $x=0$ 是渐近稳定的.

4.2 李雅普诺夫第二方法

4.1节介绍了稳定性概念, 但是据此来判明系统解的稳定性, 其应用范围是极其有限的. 俄国数学家和力学家李雅普诺夫在1892年所创立的用于分析系统稳定性的理论, 能同时适

用于分析线性系统和非线性系统、定常系统和时变系统的稳定性,是更为一般的稳定性分析方法. 李雅普诺夫创立了处理稳定性问题的两种方法,李雅普诺夫稳定性理论主要指李雅普诺夫第二方法,又称李雅普诺夫直接法. 该方法是在不求方程解的情况下,借助一个所谓的李雅普诺夫函数 $V(x)$ 和通过微分方程所计算出来的导数 $\frac{dV}{dt}$ 的符号性质,就能直接推断出解的稳定性,李雅普诺夫第二方法可用于任意阶的系统,运用这一方法可以不必求解系统状态方程而直接判定稳定性. 对非线性系统和时变系统,状态方程的求解常常是很困难的,因此李雅普诺夫第二方法就显示出很大的优越性. 与第二方法相对应的是李雅普诺夫第一方法,又称李雅普诺夫间接法,它是通过研究非线性系统的线性化状态方程的特征值的分布来判定系统稳定性的,在他之后没有得到大的发展,因而第一方法的影响远不及第二方法. 在现代控制理论中,李雅普诺夫第二方法是研究稳定性的主要方法,既是研究控制系统理论问题的一种基本工具,又是分析具体控制系统稳定性的一种常用方法. 李雅普诺夫第二方法的局限性是运用时需要有一定的经验和技巧,而且所给出的结论只是系统稳定或不稳定的充分条件.

为了便于理解,我们只考虑自治系统:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in R^n \quad (4.2.9)$$

假设 $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ 在 $G = \{x \in R^n, \|x\| \leq K\}$ 上连续,满足局部利普希茨条件,且 $F(0) = 0$.

为介绍李雅普诺夫基本定理,先引入李雅普诺夫函数概念.

定义 4.2.1 若函数:

$$V(x): G \rightarrow R,$$

满足 $V(0) = 0$, $V(x)$ 和 $\frac{\partial V}{\partial x_i} (i=1, 2, \dots, n)$ 都连续,且若存在 $0 < H \leq K$, 使在 $D = \{x | \|x\| \leq H\}$ 上 $V(x) \geq 0$ (≤ 0), 则称 $V(x)$ 是常正(负)的;若在 D 上除 $x=0$ 外总有 $V(x) > 0$ (< 0), 则称 $V(x)$ 是正(负)定的;既不是常正又不是常负的函数称为变号函数.

通常我们称函数 $V(x)$ 为李雅普诺夫函数. 易知:

函数 $V = x_1^2 + x_2^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上为正定的;函数 $V = -x_1^2 - x_2^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上为负定的;函数 $V = x_1^2 - x_2^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上为变号函数;函数 $V = x_1^2$ 在 (x_1, x_2) 平面上为常正函数.

李雅普诺夫函数有明显的几何意义. 首先看正定函数 $V = V(x_1, x_2)$.

在三维空间 (x_1, x_2, V) 中, $V = V(x_1, x_2)$ 是一个位于坐标面 $x_1 O x_2$ 即 $V=0$ 上方的曲面. 它与坐标面 $x_1 O x_2$ 只在一个点即原点 $O(0, 0, 0)$ 接触(见图 4.3(a)). 如果用水平面 $V=C$ (正常数)与 $V = V(x_1, x_2)$ 相交,并将截面垂直投影到 $x_1 O x_2$ 平面上,就得到一组一个套一个的闭曲线族 $V(x_1, x_2) = C$ (见图 4.3(b)), 由于 $V = V(x_1, x_2)$ 连续可微,且 $V(0, 0) = 0$, 故在 $x_1 = x_2 = 0$ 的充分小的邻域中, $V(x_1, x_2)$ 可以任意小. 即在这些邻域中存在 C 值可任意小的闭曲线 $V = C$. 对于负定函数 $V = V(x_1, x_2)$ 可做类似的几何解释,只是曲面 $V = V(x_1, x_2)$ 将在坐标面 $x_1 O x_2$ 的下方. 对于变号函数 $V = V(x_1, x_2)$, 自然应对应于这样的曲面,在原点 O 的任意邻域,它既有在 $x_1 O x_2$ 平面上方的点,又有在其下方的点.

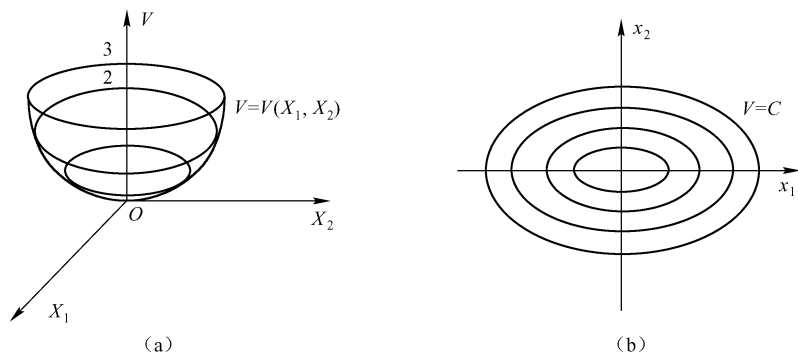


图 4.3

定理 4.2.1 对系统(4.2.9), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足:

(1) 正定;

$$(2) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.9)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(X) \text{ 常负,}$$

则方程组(4.2.9) 的零解是稳定的.

证: 对任意 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < H)$, 记:

$$\Gamma = \{x \mid \|x\| = \varepsilon\},$$

则由 $V(x)$ 正定、连续和 Γ 是有界闭集知:

$$b = \min_{x \in \Gamma} V(x) > 0.$$

由 $V(0) = 0$ 和 $V(x)$ 连续知, 存在 $\delta > 0 (\delta < \varepsilon)$, 使当 $\|x\| \leq \delta$ 时, $V(x) < b$, 于是有 $\|x\| \leq \delta$ 时:

$$x(t, t_0, x_0) < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad (4.2.10)$$

若上述不等式不成立, 由 $\|x\| \leq \delta < \varepsilon$ 和 $x(t, t_0, x_0)$ 的连续性知存在 $t_1 > t_0$, 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, $x(t, t_0, X_0) < \varepsilon$, 而 $x(t_1, t_0, x_0) = \varepsilon$, 那么由 b 的定义, 有:

$$V(x(t_1, t_0, X_0)) \geq b. \quad (4.2.11)$$

另一方面, 由条件(2)知 $\frac{dV(x(t, t_0, X_0))}{dt} \leq 0$ 在 $[t_0, t_1]$ 上成立, 即 $t \in [t_0, t_1]$ 时:

$$V(X(t, t_0, x_0)) \leq V(x_0) < b,$$

自然有 $V(x(t_1, t_0, X_0)) < b$. 这与式(4.2.11)矛盾,

即式(4.2.10)成立. 图 4.4 所示为 $n=2$ 的情况.

例 4.2.1 考虑无阻尼线性振动方程:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.2.12)$$

的平衡位置的稳定性.

解: 把方程(4.2.12)化为等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x, \end{cases} \quad (4.2.13)$$

方程(4.2.12) 的平衡位置即方程组(4.2.13) 的

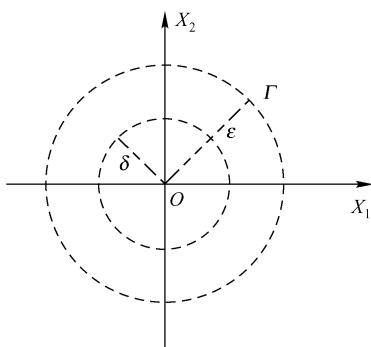


图 4.4

零解. 做 V 函数:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{\omega^2} y^2 \right),$$

有:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.13)} = (x\dot{x}) \frac{1}{\omega^2} y\dot{y},$$

即 $V(x, y)$ 正定, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.13)} \leq 0$. 于是由定理 4.2.2 知方程组(4.2.13)的零解是稳定的, 即方程(4.2.12)的平衡位置是稳定的.

引理 4.2.1 若 $V(x)$ 是正定(或负定)的李雅普诺夫函数, 且对连续有界函数 $x(t)$ 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0,$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

证明由读者自己完成.

定理 4.2.2 对系统(4.2.9), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足:

(1) 正定;

$$(2) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.9)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(X) \text{ 常负},$$

则方程组(4.2.9)的零解是渐近稳定的.

证: 由定理 4.2.2 知方程组(4.2.9)的零解是稳定的. 取 $\bar{\delta}$ 为定理 4.2.2 的证明过程中的 δ , 于是当 $\|x\| \leq \bar{\delta}$ 时, $V(x(t, t_0, x_0))$ 单调下降. 若 $x_0 = 0$, 则由唯一性知 $x(t, t_0, x_0) = 0$, 自然有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

不妨设 $x_0 \neq 0$, 由初值问题解的唯一性, 对任意 t , $x(t, t_0, x_0) \neq 0$, 从而由 $V(x)$ 的正定性知 $V(x(t, t_0, x_0)) > 0$ 总成立, 那么存在 $a \geq 0$, 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, t_0, x_0)) = a.$$

假设 $a > 0$, 联系到 $V(x(t, t_0, x_0))$ 的单调性有:

$$a < V(x(t, t_0, x_0)) < V(x_0), \quad t > t_0,$$

从而由 $V(0) = 0$ 知存在 h , 使 $t > t_0$ 时:

$$h < \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon. \quad (4.2.14)$$

由条件(2)有:

$$M = \max_{h \leq x \leq \bar{\delta}} \frac{dV}{dt} < 0,$$

故从式(4.2.14)知:

$$\frac{dV(x(t, t_0, x_0))}{dt} \leq M,$$

对上述不等式两端从 t_0 到 t 积分得:

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x_0) \leq M(t - t_0).$$

该不等式意味着:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, t_0, x_0)) = -\infty,$$

这显然与 $V(x)$ 正定矛盾. 故 $a=0$, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, t_0, x_0)) = 0.$$

由于零解是稳定的, 所以 $x(t, t_0, x_0)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界, 再由引理知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

例 4.2.2 证明方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1); \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (4.2.15)$$

的零解渐近稳定.

证: 做李雅普诺夫函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

有:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.15)} &= (x\dot{x} + y\dot{y}) \Big|_{(4.2.15)} \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1), \end{aligned}$$

在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 上 $V(x, y)$ 正定, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.15)}$ 负定, 故由定理 4.2.2 知其零解渐近稳定.

最后, 我们给出不稳定性定理而略去证明.

定理 4.2.3 对系统(4.2.9), 若在区域 D 上存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足:

$$(1) \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(4.2.9)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(X) \text{ 正定,}$$

$$(2) V(x) \text{ 不是常函数,}$$

则系统(4.2.9)的零解是不稳定的.

习题

1. 对于方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2^4; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 x_1^4, \end{cases}$$

试说明 $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定的, 而 $\frac{dV}{dt}$ 是常负的.

2. 讨论方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2^4; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 x_1^4, \end{cases}$$

零解的稳定性.

3. 讨论自治系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1x_2^4; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2x_1^4, \end{cases}$$

零解的稳定性.

4.3 平面自治系统的基本概念

本节考虑平面自治系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.3.16)$$

以下总假设函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在区域:

$$D: |x| < H, \quad |y| < H \quad (H \leq +\infty)$$

上连续并满足初值解的存在与唯一性定理的条件.

4.3.1 相平面、相轨线与相图

我们把 xOy 平面称为方程组(4.3.16)的相平面, 而把方程组(4.3.16)的解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在 xOy 平面上的轨迹称为方程组(4.3.16)的轨线或相轨线. 轨线族在相平面上的图像称为方程组(4.3.16)的相图.

易于看出, 解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在相平面上的轨线正是这个解在 (x, y, t) 三维空间中的积分曲线在相平面 xOy 上的投影. 我们以后会看到, 用轨线来研究方程组(4.3.16)的解通常要比用积分曲线方便得多.

下面通过一个例子来说明方程组的积分曲线和轨线的关系.

例 4.3.1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y; \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

很明显, 方程组有特解 $x = \cos t$, $y = \sin t$, 它在 (x, y, t) 三维空间中的积分曲线是一条螺旋线(见图 4.5(a)), 它经过点 $(1, 0, 0)$. 当 t 增加时, 螺旋线向上方盘旋. 上述解在 xOy 平面上的轨线是圆 $x^2 + y^2 = 1$, 它恰为上述积分曲线在 xOy 平面上的投影. 当 t 增加时, 轨线的方向如图 4.5(b)所示.

另外, 易知对于任意常数 α , 函数 $x = \cos(t + \alpha)$, $y = \sin(t + \alpha)$ 也是方程组的解. 它的积分曲线是经过点 $(-\alpha, 1, 0)$ 的螺旋线. 但是, 它们与解 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 有同一条轨线 $x^2 + y^2 = 1$.

同时, 我们可以看出, $x = \cos(t + \alpha)$, $y = \sin(t + \alpha)$ 的积分曲线可以由 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 的积分曲线沿 t 轴向下平移距离 α 而得到. 由于 α 的任意性, 可知轨线 $x^2 + y^2 = 1$ 对应着无穷

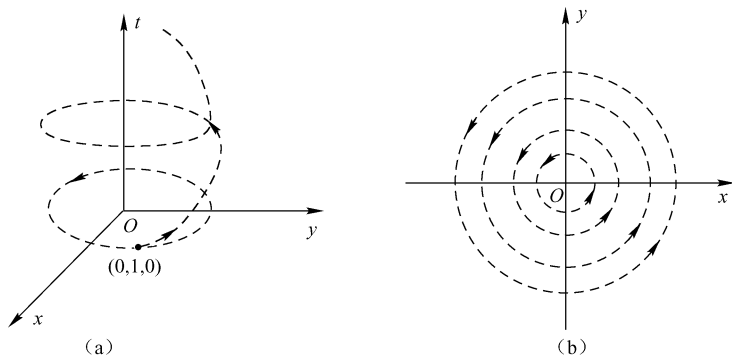


图 4.5

多条积分曲线.

为了画出方程组在相平面上的相图, 我们求出方程组通解:

$$\begin{cases} x = A \cos(t + \alpha); \\ y = A \sin(t + \alpha), \end{cases}$$

其中 A, α 为任意常数. 于是方程组的轨线就是圆族 (见图 4.5(b)). 特别地, $x=0, y=0$ 是方程的解, 它的轨线是原点 $O(0, 0)$.

4.3.2 平面自治系统的三个基本性质

性质 1 积分曲线的平移不变性.

设 $x=x(t), y=y(t)$ 是自治系统 (4.3.16) 的一个解, 则对于任意常数 τ , 函数 $x=x(t+\tau), y=y(t+\tau)$ 也是系统 (4.3.16) 的解.

事实上, 我们有恒等式:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t+\tau)}{dt} &= \frac{dx(t+\tau)}{t+\tau} = P(x(t+\tau), y(t+\tau)); \\ \frac{dy(t+\tau)}{dt} &= \frac{dy(t+\tau)}{t+\tau} = Q(x(t+\tau), y(t+\tau)). \end{aligned}$$

由这个事实可以推出: 将系统 (4.3.16) 的积分曲线沿轴做任意平移后, 仍然是系统 (4.3.16) 的积分曲线, 从而它们所对应的轨线也相同. 于是, 自治系统 (4.3.16) 的一条轨线对应着无穷多个解.

性质 2 轨线的唯一性.

如果 $P(x, y), Q(x, y)$ 满足初值解的存在与唯一性定理条件, 则过相平面上的区域 D 的任意一点 $p_0 = (x_0, y_0)$, 系统 (4.3.16) 存在唯一一条轨线. 事实上, 假设在相平面的 p_0 点附近有两不同的轨线段 l_1 和 l_2 都通过 p_0 点. 则在 (t, x, y) 空间中至少存在两条不同的积分曲线段 Γ_1 和 Γ_2 (它们有可能属于同一条积分曲线), 使得它们在相空间中的投影分别是 l_1 和 l_2 (见图 4.6, 这是不妨设 $t_1 < t_2$). 现在把 Γ_1 所在的积分曲线沿 t 轴向右平移 $t_2 - t_1$, 则由性质 1 知道, 平移后得到的 $\tilde{\Gamma}$ 仍是系统 (4.3.16) 的积分曲线, 并且它与 Γ_2 至少有一个公共点. 因此, 利用解的唯一性, $\tilde{\Gamma}$ 与 Γ_2 应完全重合, 从而它们在相空间中有相同的投影. 另一方面, Γ_1 与 $\tilde{\Gamma}$ 在相空间显然也有相同的投影. 这蕴涵 Γ_1 和 Γ_2 在相平面中的 p_0 点附近有相同

的投影,而这与上面的假设矛盾.

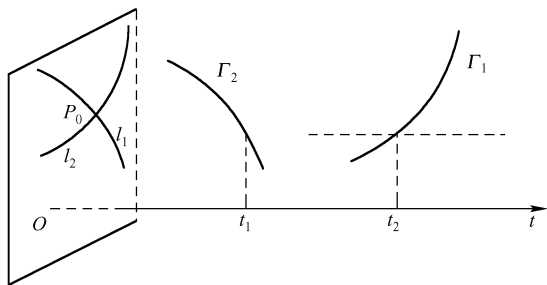


图 4.6

性质 1 和性质 2 说明相平面上每条轨线都是沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线的投影,而且只是这族积分曲线的投影.

此外,由性质 1 同样还可知道,系统(4.3.16)的解 $(x(t, t_0, x_0, y_0), y(t, t_0, x_0, y_0))$ 的一个平移 $(x(t - t_0, 0, x_0, y_0), y(t - t_0, 0, x_0, y_0))$ 仍是系统(4.3.16)的解,并且它们满足同样的初值条件,从而由解的唯一性知:

$$x(t - t_0, 0, x_0, y_0) = x(t, t_0, x_0, y_0);$$

$$y(t - t_0, 0, x_0, y_0) = y(t, t_0, x_0, y_0).$$

因此,在系统(4.3.16)的解族中我们只需考虑相应于初始时刻 $t_0 = 0$ 的解,并简记为:

$$x(t, x_0, y_0) = x(t, 0, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0) = y(t, 0, x_0, y_0).$$

性质 3 群的性质.

系统(4.3.16)的解满足关系式:

$$x(t_2, x(t_1, x_0, y_0), y(t_1, x_0, y_0)) = x(t_1 + t_2, x_0, y_0); \quad (4.3.17)$$

$$y(t_2, x(t_1, x_0, y_0), y(t_1, x_0, y_0)) = y(t_1 + t_2, x_0, y_0). \quad (4.3.18)$$

其几何意义是:在相平面上,如果从点 $p_0 = (x_0, y_0)$ 出发的轨线经过时间 t_1 到达点 $p_1 = (x_1, y_1) = (x(t_1, x_0, y_0), y(t_1, x_0, y_0))$,再经过时间 t_2 到达点 $p_2 = (x(t_2, x_1, y_1), y(t_2, x_1, y_1))$,那么从点 p_0 出发的轨线经过时间 $t_1 + t_2$ 也到达点 p_2 .

事实上,由平移不变性(性质 1). $(x(t + t_1, x_0, y_0), y(t + t_1, x_0, y_0))$ 是系统(4.3.16)的解,而且易知它与解 $(x(t, x_1, y_1), y(t, x_1, y_1))$ 在 $t = 0$ 时的初值都等于 $(x_1, y_1) = (x(t_1, x_0, y_0), y(t_1, x_0, y_0))$. 由解的唯一性知,这两个解应该相等. 取 $t = t_2$ 就得到式(4.3.18).

对于固定的 $t \in R$, 定义平面到自身的变换 ϕ_t 如下:

$$\phi_t(x_0, y_0) = x(t, x_0, y_0),$$

也就是 ϕ_t 把点 (x_0, y_0) 映射到由该点出发的轨线经过时间 t 到达的点. 在集合 $\phi = \{\phi_t: t \in R\}$ 中引入乘法运算:

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(x_0, y_0) = \phi_{t_1}(\phi_{t_2}(x_0, y_0)),$$

由式(4.3.18)知 $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1 + t_2}$. 所以乘法运算. 在集合 ϕ 中是封闭的,而且满足结合律,故二元组 (ϕ, \circ) 构成一个群,容易验证,其单位元为 ϕ_0 , 而 ϕ_t 的逆元为 ϕ_{-t} . 这就是群性质名称的由来. 这个平面到自身的变换群也称作由方程(4.3.16)所生成的动力系统. 有时也把方程(4.3.16)就叫做一个动力系统. 由此所开展的研究工作便是动力系统这个重要的研究方向.

4.3.3 常点、奇点与闭轨

现在考虑自治系统(4.3.16)的轨线类型. 显然, 系统(4.3.16)的一个解 $x = x(t), y = y(t)$ 所对应的轨线可分为自身不相交和自身相交的两种情形. 其中轨线自身相交是指存在不同时刻 t_1, t_2 使得 $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$. 这样的轨线又有以下两种可能的形状.

(1) 若对一切 $t \in (-\infty, +\infty)$, 有:

$$x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0, (x_0, y_0) \in D,$$

则称 $x = x_0, y = y_0$ 为系统(4.3.16)的一个定常解. 它所对应的积分曲线是 (t, x, y) 空间中平行于 t 轴的直线 $x = x_0, y = y_0$. 对应此解的轨线是相平面中的一个点 (x_0, y_0) . 我们称 (x_0, y_0) 为奇点(或平衡点). 显然 (x_0, y_0) 是系统(4.3.16)的一个奇点的充分必要条件是:

$$P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0.$$

(2) 若存在 $T > 0$, 使得对一切 t 有:

$$x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t),$$

则称 $x = x(t), y = y(t)$ 为系统(4.3.16)的一个周期解, T 为周期. 它所对应的轨线显然是相平面中的一条闭曲线, 称为闭轨.

由以上讨论和系统(4.3.16)轨线的唯一性, 我们有如下结论: 自治系统(4.3.16)的一条轨线只可能是下列三种类型之一: ①奇点; ②闭轨; ③自身不相交的非闭轨线.

平面定性理论的研究目标就是: 在不求解的情况下, 仅从系统(4.3.16)右端函数的性质出发, 在相平面上描绘出其轨线的分布图. 如何完成这一任务呢? 现在我们从运动的观点给出系统(4.3.16)的另一种几何解释.

如果把系统(4.3.16)看成描述平面上一个运动质点的运动方程, 那么系统(4.3.16)在相平面上每一点 (x, y) 确定了一个速度向量:

$$V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (4.3.19)$$

因而, 系统(4.3.16)在相平面上定义了一个速度场或称向量场. 而系统(4.3.16)的轨线就是相平面上一条与向量场式(4.3.19)相吻合的光滑曲线. 这样积分曲线与轨线的显著区别是: 积分曲线可以不考虑方向, 而轨线是一条有向曲线, 通常用箭头在轨线上标明对应于时间增大时的运动方向.

进一步, 在方程(4.3.16)中消去 t , 得到方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (4.3.20)$$

由方程(4.3.20)易见, 经过相平面上每一个常点只有唯一轨线, 而且可以证明常点附近的轨线拓扑等价于平行直线. 这样, 只有在奇点处, 向量场的方向不确定. 因此, 在平面定性理论中, 通常从奇点入手, 弄清楚奇点附近的轨线分布情况. 然后, 再弄清方程(4.3.16)是否存在闭轨, 因为一条闭轨线可以把平面分成其内部和外部, 再由轨线的唯一性, 对应内部的轨线不能走到外部, 同样对应外部的轨线也不能进入内部. 这样对理解系统整体的性质会起很大的作用.

4.4 平面定性理论简介

本节将对如何获得平面系统(4.3.16)的整体相图结构做一简单介绍.

4.4.1 初等奇点附近的轨线分布

前面我们已经得到, 奇点是动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases}$$

的一类特殊轨线. 它对于研究系统(4.3.16)的相图有重要的意义. 为此, 我们在本节先研究一类最简单的自治系统——平面线性系统的奇点与它附近的轨线的关系. 平面线性系统的一般形式为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (4.4.21)$$

我们假定其系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

为非奇异矩阵, 即其行列式 $\det A \neq 0$ (A 不以零为特征根).

显然, 系统(4.4.21)只有一个奇点 $(0, 0)$. 我们研究系统(4.4.21)在 $(0, 0)$ 点附近的轨线分布. 因为系统(4.4.21)是可解的, 我们的做法是先求出系统的通解, 然后消去参数 t , 得到轨线方程. 从而了解在奇点 $(0, 0)$ 附近的轨线分布情况. 根据奇点附近轨线分布的形式, 可以确定奇点有四种类型, 即结点、鞍点、焦点和中心.

为了讨论问题方便, 我们把方程写成向量形式:

令

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

则

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix},$$

此时方程组(4.4.21)可以写成向量形式:

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (4.4.22)$$

1. 系数矩阵为标准型的平面线性系统的奇点附近轨线分布

我们研究线性系统(4.4.22)在奇点 $(0, 0)$ 附近轨线分布的方法, 首先应用线性变换, 把系统(4.4.22)化成标准型, 并从化成标准型的方程中求出解来, 确定其轨线分布, 然后再回过头来考虑原系统(4.4.22)在奇点附近的轨线分布.

根据线性代数中关于矩阵的定理, 存在非奇异矩阵 T , 使得:

$$J = T^{-1}AT \quad (J \text{ 为若当标准形})$$

令 $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, 进行代换 $\tilde{X} = TX$, 则:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = T \frac{dX}{dt} = T^{-1}AT = J\tilde{X},$$

于是系统(4.4.22)化为:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = J\tilde{X}. \quad (4.4.23)$$

由线性变换的理论可知,标准形 J 的形式由系数矩阵 A 的特征根的情况决定.

(1) 特征根为相异实根 λ, μ 时:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix};$$

(2) A 的特征根为重根 λ 时,由 A 的初等因子的不同情形, A 的标准型 J 可能有两种,为方便计,写成:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ 或 } J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix};$$

(3) A 的特征根为共轭复根 $\alpha + \beta i$ 时:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(因 $\det A \neq 0$, 特征根不能为零).

考察式(4.4.23),为了书写方便,去掉上标,把式(4.4.23)写成:

$$\frac{dX}{dt} = JX. \quad (4.4.24)$$

下面就 J 的不同情况来研究式(4.4.23)(即系统(4.4.24))的轨线分布.

(1) 当

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, (\lambda \neq \mu),$$

时,系统(4.4.24)写成纯量形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x; \\ \frac{dy}{dt} = \mu y, \end{cases} \quad (4.4.25)$$

求它的通解,得:

$$x = c_1 e^{\lambda t}, y = c_2 e^{\mu t}, \quad (4.4.26)$$

消去参数 t , 得轨线方程:

$$y = C |x|^{\frac{\mu}{\lambda}}, (C \text{ 为任意常数}). \quad (4.4.27)$$

这里假定 $|\mu| > |\lambda|$, 即 μ 表示特征根中绝对值较大的一个(显然,这不妨碍对一般性的讨论,如 $|\mu| < |\lambda|$, 则只要互换 x 轴和 y 轴).

① λ, μ 同号.

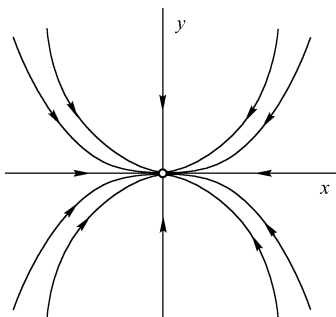
这时由于 $\frac{\mu}{\lambda} > 0$, 轨线(4.4.27)是抛物线型的(参见图4.7及图4.8).同时,由式(4.4.26)知 x 轴的正、负半轴及 y 轴的正、负半轴也都是系统(4.4.25)的轨线.由于原点(0, 0)是(4.4.25)的奇点及轨线的唯一性,轨线(4.4.27)及四条半轴轨线均不能过原点.但是由式(4.4.26)可以看出,当 $\mu < \lambda < 0$ 时,轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于原点(见图4.7);当 $\mu > \lambda > 0$ 时,轨线在 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于原点(见图4.8).另外,有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \mu e^{\mu t}}{c_1 \lambda e^{\lambda t}} = \frac{c_2 \mu}{c_1 \lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$$

于是, 当 $\mu < \lambda < 0$, 轨线(除正、负半 y 轴外)的切线斜率在 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于零, 即轨线以 x 轴为其切线的极限位置. 当 $\mu > \lambda > 0$ 时, 轨线(除正、负半 y 轴外)的切线斜率在 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于零, 即轨线以 x 轴为其切线.

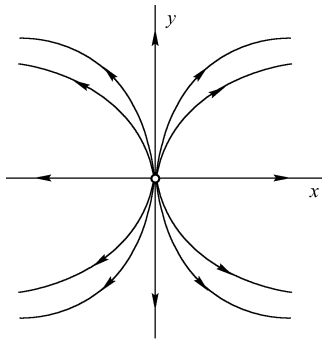
如果在某奇点附近的轨线具有如图 4.7 所示的分布情形, 我们就称这奇点为稳定结点. 因此, 当 $\mu < \lambda < 0$ 时, 原点 O 是系统(4.4.25)的稳定结点.

如果在某奇点附近的轨线具有如图 4.8 所示的分布情形, 我们就称这奇点为不稳定结点. 因此, 当 $\mu > \lambda > 0$ 时, 原点 O 是系统(4.4.25)的不稳定结点.



($\mu < \lambda < 0$)

图 4.7



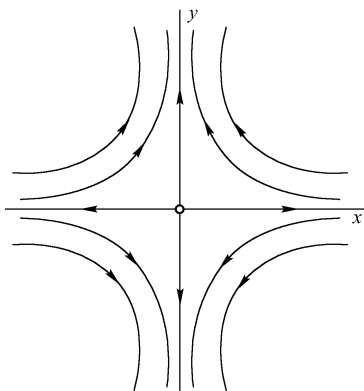
($\lambda > \mu > 0$)

图 4.8

② λ, μ 异号.

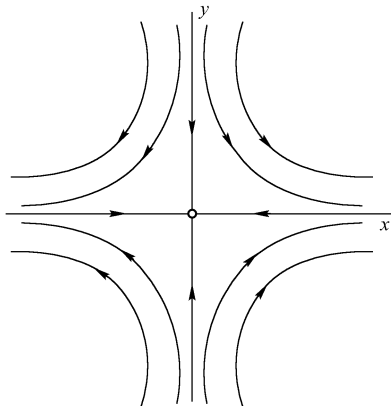
这时, 由于 $\frac{\mu}{\lambda} < 0$, 轨线(4.4.27)是双曲线型的(参见图 4.9 及图 4.10). 四个坐标半轴也是轨线. 先讨论 $\lambda < 0 < \mu$ 的情形. 由式(4.4.26)易看出当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 动点 (x, y) 沿正、负 x 半轴轨线趋于奇点 $(0, 0)$, 而沿正、负 y 半轴轨线远离奇点 $(0, 0)$. 而其余的轨线均在一度接近奇点 $(0, 0)$ 后又远离奇点(见图 4.9).

对 $\mu < 0 < \lambda$ 的情形可以类似地加以讨论, 轨线分布情形如图 4.10 所示.



(a) $\lambda < 0, \mu > 0$

图 4.9



(b) $\lambda > 0, \mu < 0$

图 4.10

如果在某奇点附近的轨线具有如图 4.9 或图 4.10 所示的分布情形, 我们称这奇点为鞍点. 因此, 当异号时, 原点 O 是系统(4.4.25)的鞍点.

(2) 当

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

时, 把系统(4.4.24)写成纯量形式就得到:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x; \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y, \end{cases} \quad (4.4.28)$$

积分此方程, 得通解:

$$x = c_1 e^{\lambda t}, y = c_2 e^{\lambda t}. \quad (4.4.29)$$

消去参数 t , 得轨线方程:

$$y = Cx, (C \text{ 为任意常数}).$$

根据 λ 的符号, 轨线图象如图 4.11 和图 4.12 所示. 轨线为从奇点出发的半射线.

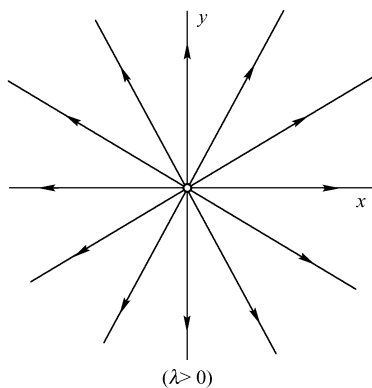


图 4.11

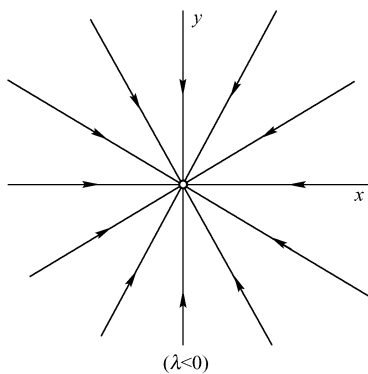


图 4.12

如果在奇点附近的轨线具有这样的分布, 就称这奇点为临界结点. 由通解(4.4.29)可以看出: 当 $\lambda < 0$ 时, 轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时趋近于原点. 这时, 我们称奇点 O 为稳定的临界结点; 当 $\lambda > 0$ 时, 轨线的正向远离原点, 我们称 O 为不稳定的临界结点.

当

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

时, 把系统(4.4.24)写成纯量形式就得到:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x; \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y, \end{cases}$$

积分此方程, 得通解:

$$x = c_1 e^{\lambda t}, y = (c_2 t + c_2) e^{\lambda t}.$$

消去参数 t , 得轨线方程:

$$C_1 \lambda y = (C_1 \ln |x| + C_0) x.$$

易于知道有关系:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \lim_{x \rightarrow 0} y'_x = \infty.$$

所以当轨线接近原点时,以 y 轴为其切线的极限位置. 此外, y 轴正、负半轴也都是轨线. 轨线在原点附近的分布情形如图 4.13 及图 4.14 所示. 如果在奇点附近轨线具有这样的分布,就称它是退化结点. 当 $\lambda < 0$ 时,轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于奇点,称这奇点为稳定的退化结点;当 $\lambda > 0$ 时,轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 时远离奇点,称这奇点为不稳定的退化结点.

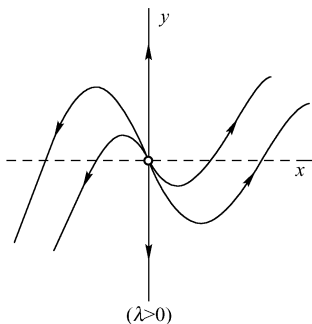


图 4.13

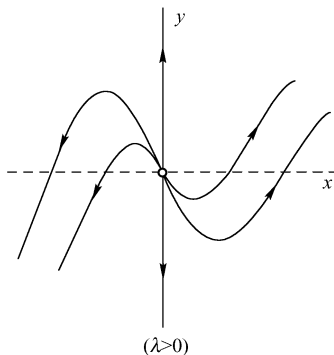


图 4.14

(3) 当

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

时,把系统(4.4.24)写成纯量形式就得到:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y; \\ \frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y, \end{cases} \quad (4.4.30)$$

我们来积分上述方程组. 将第一个方程乘以 x , 第二个方程乘以 y , 然后相加, 得:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = \alpha(x^2 + y^2),$$

或写成:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \alpha dt,$$

因而得到:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = C_1 e^{\alpha t} \text{ 或 } \rho = C_1 e^{\alpha t}.$$

其次,对方程组(4.4.30)的第一个方程乘以 y , 第二个方程乘以 x , 然后相减, 得:

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = \beta(x^2 + y^2),$$

或写成:

$$d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = -\beta dt,$$

于是得:

$$\arctan \frac{y}{x} = -\beta t + C_2 \text{ 或 } \theta = -\beta t + C_2,$$

消去参数 t , 得到轨线的极坐标方程:

$$\rho = C e^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}. \quad (4.4.31)$$

如 $\alpha \neq 0$, 则它为对数螺线族, 每条螺线都以坐标原点 O 为渐近点. 在奇点附近轨线具有这样的分面布, 称奇点为焦点.

由于 $\rho = C_1 e^{\alpha t}$, 所以当 $\alpha < 0$ 时, 随着 t 的无限增大, 相点沿着轨线趋近于坐标原点, 这时, 称原点是稳定焦点(见图 4.15), 而当 $\alpha > 0$ 时, 相点沿着轨线远离原点, 这时, 称原点是不稳定焦点(见图 4.15).

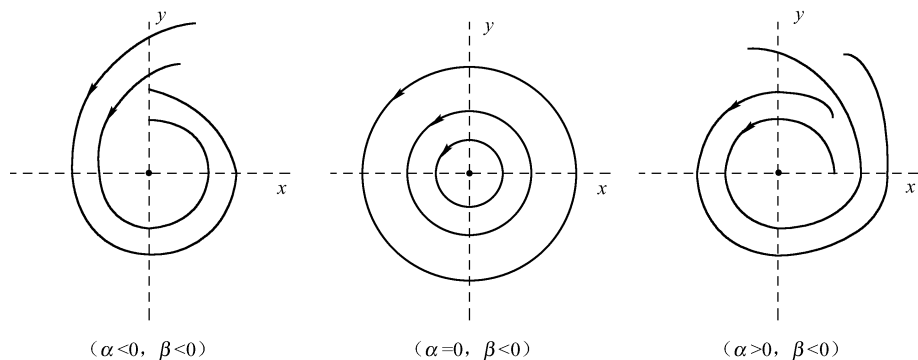


图 4.15

如果 $\alpha = 0$, 则轨线方程(4.4.31)成为:

$$\rho = C \text{ 或 } x^2 + y^2 = C^2$$

它是以坐标原点为中心的圆族. 在奇点附近轨线具有这样的分布, 称奇点为中心. 此时, 由 β 的符号来确定轨线方向. 当 $\beta < 0$ 时, 轨线的方向是逆时针的; $\beta > 0$ 时, 轨线的方向是顺时针的(见图 4.15).

综上所述, 方程组:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, (\det \mathbf{A} \neq 0)$$

经过线性变换 $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{T}\mathbf{X}$, 可化成标准型:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{X}},$$

根据 \mathbf{A} 的特征根的不同情况, 方程(4.4.23)即方程(4.4.24)的奇点可能出现四种类型: 结点型、鞍点型、焦点型、中心型.

2. 一般的平面常系数线性系统的奇点附近轨线分布

上面讲了系数矩阵为标准型的系统:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{X}},$$

的轨线在奇点 $O(0,0)$ 附近的分布情况, 现在回来研究一般的平面线性系统:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, (\det \mathbf{A} \neq 0),$$

的轨线在奇点 $O(0,0)$ 附近的分布情况.

我们知道, 式(4.4.21)可以从式(4.4.23)经逆变换 $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}$ 而得到, 而且由于 \mathbf{T} 是非奇异变换, \mathbf{T}^{-1} 也是非奇异变换, 因而也就是一个仿射变换, 它具有下述不变性:

(1) 坐标原点不变;

(2) 直线变成直线;

(3) 如果曲线 $(x(t), y(t))$ 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时趋向原点, 变换后的曲线 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时也趋向原点;

(4) 如果曲线 $(x(t), y(t))$ 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时盘旋地趋向原点, 变换后的曲线 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时也盘旋地趋向原点;

(5) 闭曲线 $(x(t), y(t))$ 经过变换后, 所得曲线 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 仍为闭曲线.

由此可见, 方程(4.4.23)在各种情况下的轨线, 经过线性变换 \mathbf{T}^{-1} 后得到方程(4.4.22)的轨线, 其结点型、鞍点型、焦点型及中心型的轨线分布是不变的. 这就是轨线结构的不变性.

并且, 由于变换后轨线趋向原点的方向不变, 所以结点、焦点的稳定性也不改变.

因为 \mathbf{A} 的特征根完全由 \mathbf{A} 的系数确定, 所以 \mathbf{A} 的系数可以确定出奇点的类型. 因此, 下面来研究 \mathbf{A} 的系数与奇点分类的关系.

方程(4.4.22)的系数矩阵的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix},$$

或:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

为了书写方便, 令:

$$T = -(a_{11} + a_{22}), D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

于是特征方程可写为:

$$\lambda^2 + T\lambda + D = 0,$$

特征根为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

下面就分特征根为相异实根, 重根及复根三种情况加以研究.

(1) $T^2 - 4D > 0$.

① $D > 0$:

$$\begin{cases} T < 0 & \text{二根同正,} \\ T > 0 & \text{二根同负.} \end{cases} \quad \text{——奇点为结点}$$

② $D < 0$ 二根异号, 奇点为鞍点.

(2) $T^2 - 4D = 0$:

$$\begin{cases} T < 0 & \text{正的重根,} \\ T > 0 & \text{负的重根.} \end{cases} \quad \text{——奇点为结点或退化结点}$$

$$(3) T^2 - 4D < 0;$$

$$\begin{cases} T=0 & \text{复数根的实部不为零, 奇点为焦点,} \\ T>0 & \text{复数根的实部为零, 奇点为中心.} \end{cases}$$

综合上面的结论, 由曲线 $T^2 = 4\Delta > 0$, D 轴及 T 轴把 TOD 平面分成几个区域, 不同的区域对应着不同类型的奇点 (见图 4.16).

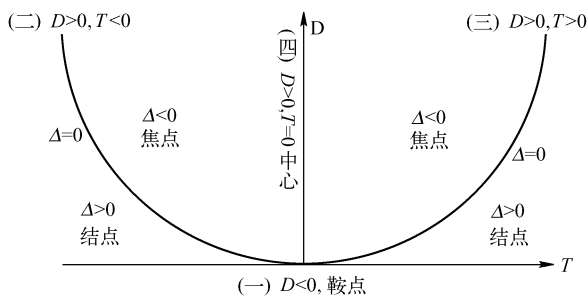


图 4.16

依据以上讨论, 总结如下.

(1) 若式(4.4.23)的所有特征根都具有负实部(负实根或具有负实部的复根), 则此方程的零解是渐进稳定的, 即:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0, (i = 1, \dots, n);$$

(2) 若式(4.4.23)的特征根中至少有一个根有正实部(即正实根或有正实部的复根), 则方程的零解是不稳定的;

(3) 若式(4.4.23)没有带正实部的根, 但有实部为零的单根(零根或一对纯虚根), 则方程的零解是稳定的, 但不是渐近稳定的;

(4) 若式(4.4.23)没有带正实部的根, 但有多重零根或多重纯虚根, 此时若每个重根的代数重数与几何重数相等, 则零解为稳定的; 若至少有一个重根的几何重数小于代数重数, 则系统零解是不稳定的.

3. 霍尔维茨判据

由于特征根实部的符号在稳定性问题中有关键的作用, 这里列出 Routh - Hurwitz 判据或称霍尔维茨(Hurwitz)判据, 它给出特征方程的根有负实部的充要条件.

系统零解的稳定性问题可以归结为特征方程:

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, (a_0 \neq 0),$$

的根的性质研究.

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

特征方程所有的根具有负实部, 其充要条件是:

$$\Delta_k > 0,$$

在 $k=1,2,\cdots,n$ 时成立(最后的 $\Delta_n > 0$, 可用条件 $a_n > 0$ 代替.)

这个论断称为霍尔维茨定理, 条件称为霍尔维茨条件. 可以看出, 所有根具有负实部的必要条件是 $a_i > 0 (i=1,\cdots,n)$. 若其中一个系数是 0 或负数, 则不用再计算行列式的值了. 霍尔维茨条件有一个等价条件为:

$$\Delta_k > 0, k=1,\cdots,n \Leftrightarrow a_i > 0, i=1,\cdots,n \text{ 且 } \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \cdots,$$

另有一个充分条件为:

$$\Delta_k > 0, k=1,\cdots,n \Leftrightarrow a_i a_{i+1} \geq 3a_{i-1} a_{i+2}.$$

4.4.2 平面非线性自治系统奇点附近的轨线分布

以上是平面线性系统(4.4.22)的轨线在奇点 $O(0,0)$ 附近的分布情况. 下面再根据上面的讨论介绍一点研究一般的平面系统(4.3.16)的轨线在奇点附近的分布的方法.

我们不妨假设原点 $O(0,0)$ 是系统(4.3.16)的奇点, 即 $P(0,0) = Q(0,0) = 0$. 这并不失一般性. 因为, 如果 (x_0, y_0) 为系统(4.3.16)的一个奇点, 只要做变换:

$$x = x_0 + x', y = y_0 + y'$$

就可以把奇点 (x_0, y_0) 移到原点 $(0,0)$.

设系统(4.3.16)的右端函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在奇点 $O(0,0)$ 附近连续可微, 并可以将系统(4.3.16)的右端写成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + \varphi(x,y); \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + \psi(x,y), \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} a_{11} &= P'_x(0,0), a_{12} = P'_y(0,0); \\ a_{21} &= Q'_x(0,0), a_{22} = Q'_y(0,0). \end{aligned}$$

我们把平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

称为一般平面自治系统(4.3.16)的一次近似. 在条件:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

的假设下, 称点 $(0,0)$ 为系统(4.3.16)的初等奇点, 否则称它为高阶奇点. 系统(4.4.21)的奇点的情况已讨论清楚. 一个常用的手法是将系统(4.3.16)与方程组(4.4.22)进行比较, 对“摄动” $\varphi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 加上一定的条件, 就可以保证对于某些类型的奇点, 系统(4.3.16)在 $O(0,0)$ 的邻域的轨线分布情形与系统(4.4.21)的轨线分布情形同. 我们只介绍如下的一个常见的结果而不加以证明.

定理 4.4.1 如果在一次近似(4.4.21)中, 有:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

且 $O(0,0)$ 为其结点 (不包括退化结点及临界结点)、鞍点或焦点, 又 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 的邻域连续可微, 且满足:

$$\lim_{(x^2+y^2) \rightarrow 0} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \lim_{(x^2+y^2) \rightarrow 0} \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad (4.4.32)$$

则系统(4.3.16)的轨线在 $O(0,0)$ 附近的分布情形与系统(4.4.21)的轨线完全相同.

当 $O(0,0)$ 为系统(4.4.21)的退化结点、临界结点或中心时, 条件(4.4.21)不足以保证系统(4.3.16)在 $O(0,0)$ 的邻域的轨线分布与系统(4.4.21)的轨线分布情形相同, 还必须加强这个条件, 我们不再列举了.

4.4.3 极限环的概念

为了说明极限环的概念, 先看看下面的例子.

例 4.4.1 考察方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1); \\ \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (4.4.33)$$

的轨线分布.

解: 将方程(4.4.33)的第一个方程两端乘以 x , 第二个两端乘以 y , 然后相加, 得到:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = -(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1), \quad (4.4.34)$$

做极坐标变换:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

由 $x^2 + y^2 = r^2$, 微分之, 则得:

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt},$$

所以式(4.4.34)可写成:

$$r \frac{dr}{dt} = -r^2(r^2 - 1),$$

或

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1).$$

其次, 将方程组(4.4.33)的第一个方程乘以 y , 第二个方程乘以 x , 然后相减, 得:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -(x^2 + y^2),$$

由 $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, 微分之, 可知:

$$\frac{d\theta}{dt} = 1,$$

于是原方程(4.4.33)经变换后化为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1); \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \end{cases} \quad (4.4.35)$$

积分所得方程(4.4.35). 易看出, 方程组(4.4.35)有两个特解:

$$r = 0; r = 1,$$

其中, $r=0$ 对应系统(4.4.35)奇点, 而 $r=1$ 对应于方程组(4.4.33)的一个周期解, 它所对应的闭轨线是以原点为中心以1为半径的圆.

进一步求方程组的通解, 得:

$$\begin{cases} \frac{r^2}{1-r^2} = Ae^{2t} \\ \theta - \theta_0 = t, \end{cases}$$

其中, $A = \frac{r_0^2}{1-r_0^2}$. 于是方程组(4.4.33)的轨线分布如图4.17所示.

从方程组(4.4.33)的相图上可看出, 轨线分布是这样的:

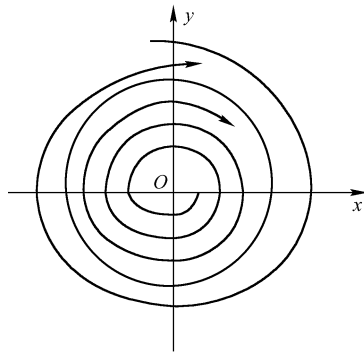


图 4.17

(1) $(0,0)$ 为奇点, $x^2 + y^2 = 1$ 为一闭轨线;

(2) 闭轨线 $x^2 + y^2 = 1$ 的内部和外部的轨线, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时分别盘旋地趋近于该闭轨线.

我们在4.3节的例4.3.1中也提到过闭轨线, 但当时的闭轨线都是一族连续分布的闭轨线. 而且当时没出现其他的轨线当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时趋近于闭轨线的情况. 因此, 上例中的闭轨线及它附近的轨线的分布情形, 是一种新的结构. 我们做如下的定义.

定义 4.4.1 设系统(4.3.16)有闭轨线 C . 假如在 C 充分小邻域中, 除 C 之外, 轨线全不是闭轨线, 且这些非闭轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时趋近于闭轨线 C , 则说闭轨线 C 是孤立的, 并称之为(4.3.16)的一个极限环.

极限环 C 将相平面分成两个区域: 内域和外域.

定义 4.4.2 如果极限环 C 的内域的靠近 C 的轨线当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时盘旋地趋近于 C , 则称 C 是内稳定的(内不稳定的); 如果在极限环 C 的外域的靠近 C 的轨线当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时盘旋地趋近于 C , 则称 C 是外稳定的(外不稳定的); 如果当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, C 的内部及外部靠近 C 的轨线都盘旋地趋近于 C , 则称 C 是稳定的(不稳定的), 如果当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, C 的内外部稳定性相反, 则称 C 为半稳定的.

易于看出, 例4.4.1中的轨线 $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定的极限环.

4.4.4 极限环的存在性和不存在性

稳定的极限环表示了运动的一种稳定的周期态, 它在非线性振动问题中有重要意义. 一般说来, 一个系统的极限环并不能像例4.4.1那样容易算出来. 关于判断极限环存在性的方法, 我们只叙述下面的相关定理, 其证明可参阅相关专著.

定理 4.4.2 设区域 D 是由两条简单闭曲线 L_1 和 L_2 所围成的环域, 并且在 $\bar{D} = L_1 \cup D \cup L_2$ 上系统(4.3.16)无奇点; 从 L_1 和 L_2 上出发的轨线都不能离开(或都不能进入). 设 L_1 和 L_2 均不是闭轨线, 则系统(4.3.16)在 D 内至少存在一条闭轨线 Γ , 它与 L_1 和 L_2 的相对位置如图4.18所示, 即 Γ 在 D 内不能收缩到一点.

如果把系统(4.3.16)看成一平面流体的运动方程, 那么上述环域定理表明: 如果流体从

环域 D 的边界流入 D , 而在 D 内又没有渊和源, 那么流体在 D 内有环流存在. 这个力学意义是比较容易想象的.

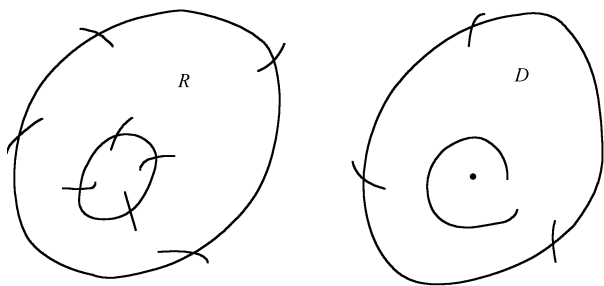


图 4.18

习惯上, 把 L_1 和 L_2 分别称做 Poincare – Bendixson 环域的内、外境界线.

关于平面系统 (4.3.16) 不存在极限环的判定准则常用的是下面的定理.

定理 4.4.3 (Bendixson 判断准则) 设在单连通区域 G 内, 系统 (4.3.16) 的向量场 (P, Q) 有连续偏导数, 若该向量场的散度:

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

保持常号, 且不在 G 的任何子域内恒等于零, 则系统 (4.3.16) 在 G 内无闭轨.

定理 4.4.4 (Dulac 判断准则) 设在单连通区域 G 内, 系统 (4.3.16) 的向量场 (P, Q) 有连续偏导数, 并存在连续可微函数 $B(x, y)$ 使得:

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

保持常号, 且不在 G 内任何子区域内恒为零, 则系统 (4.3.16) 在 G 内无闭轨.

例 4.4.2 讨论系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x - y - x^2 - y^2, \end{cases} \quad (4.4.36)$$

的全局结构.

解: (1) 奇点.

系统 (4.4.36) 有两个奇点 $O(0, 0)$ 和 $E(-1, 0)$.

对于奇点 $O(0, 0)$, 其线性近似方程的系数阵是:

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

它的特征根是 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$, 显然是稳定焦点

对于奇点 $E(-1, 0)$, 其线性近似方程的系数阵是:

$$\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

它的特征根是 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}i)$, 显然 $E(-1, 0)$ 是鞍点.

(2) 闭轨线.

取函数 $B(x, y) = e^{2x}$, 有:

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -e^{2x} < 0,$$

由定理 4.4.7 可见系统(4.4.36)在 xOy 平面上无闭轨.

在 1900 年巴黎国际数学家代表大会上, 希尔伯特发表了题为《数学问题》的著名讲演, 其中第 16 个问题的后半部要求讨论对 $dx/dy = Y/X$ 的极限环的最多个数 $N(n)$ 的相对位置, 其中 X, Y 是 x, y 的 n 次多项式. 对 $n=2$ (即二次系统)的情况, 1934 年福罗猷尔得到 $N(2) \geq 1$; 1952 年鲍廷得到 $N(2) \geq 3$; 1955 年苏联的波德洛夫斯基宣布 $N(2) \leq 3$, 这个曾震动一时的结果, 由于其中的若干引理被否定而成疑问. 关于相对位置, 中国数学家董金柱、叶彦谦于 1957 年证明了 $E(2)$ 不超过两串. 1957 年, 中国数学家秦元勋和薄富金具体给出了 $n=2$ 的方程具有至少 3 个成串极限环的实例. 1978 年, 中国的史松龄在秦元勋、华罗庚的指导下, 与王明淑分别举出至少有 4 个极限环的具体例子. 1983 年, 秦元勋进一步证明了二次系统最多有 4 个极限环, 并且是 $(1, 3)$ 结构, 从而最终解决了二次微分方程解的结构问题, 并为研究希尔伯特第 16 问题提供了新的途径.

第 5 章 应用微分方程模型简介

5.1 人口与动物世界的微分方程模型

我们在前面已经给出了一般的单种群模型, 下面继续讨论更进一步的情况.

5.1.1 进行开发的单种群模型

养鱼场从鱼池中捞鱼出售, 每次捕捞太少不合算, 不仅销售收入少, 而且鱼池中鱼过多也不利于鱼群的生长繁衍, 但每次捞得过多, “竭泽而渔”, 显然也不可取, 应该如何控制捕捞率, 使得总经济效益最优?

设单位时间内捕捞 h 条鱼, t 时刻池中鱼数为 $N(t)$, 则满足如下数学模型:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN}{K}(K - N) - h, \quad (5.1.1)$$

其中, K 是鱼池中鱼数的最大值(受鱼池条件的限制, 此最大值 K 是存在的), h 为收获率; 考虑 $\frac{dN}{dt} = 0$, 即 $rN - \frac{r}{K}N^2 - h = 0$, 得知 $h \leq \frac{rK}{4}$ 时, $\frac{dN}{dt} < 0$, 鱼池中鱼的数量单调递减, 长此下去, 将无鱼可捞, 所以 $h = \frac{rK}{4}$ 是最大可承受的产量.

$h < \frac{rK}{4}$ 时, 有两个正平衡点:

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(K - \sqrt{K^2 - \frac{4hK}{r}} \right);$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left(K + \sqrt{K^2 - \frac{4hK}{r}} \right);$$

这样, 模型(5.1.1)可以写成:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{r}{K}(N - N_1)(N - N_2).$$

当 $N < N_1$ (N_2) 时, $\frac{dN}{dt} < 0$; 当 $N_2 > N > N_1$ 时, $\frac{dN}{dt} > 0$; 当 $N > N_2$ 时, $\frac{dN}{dt} < 0$, 可见当 t 增加时, $N = N_1$ 附近的 $N = N(t)$ 远离这一条水平线 $N = N_1$ (NOt 平面中 t 为横轴), 而在 $N = N_2$ 附近的 $N = N(t)$ 趋于这一条水平线 $N = N_2$, $N = N_1$ 与 $N = N_2$ 是平凡解, $N = N_1$ 不稳定, $N = N_2$ 稳定.

初始时刻, 若池鱼数 $N(t_0) < N_1$, 则 $N(t)$ 单调下降而趋于零, 池鱼会捞净捕绝, 若 $N(t_0) > N_1$, 则池鱼数量将自动调节, 随时间的增加趋于 N_2 条鱼. 又由于 $N_1 = \frac{1}{2} \left(K - \sqrt{K^2 - \frac{4hK}{r}} \right)$, 可

见 h 越小, N_1 越小 ($0 < h < \frac{rK}{4}$), 所以一般要用小收获率 h 来开发低密度的种群, 而用大收获率

去开发高密度的种群, 由 $\frac{1}{2} \left(K - \sqrt{K^2 - \frac{4hK}{r}} \right) < N(t_0)$ 可解得:

$$0 < h < \frac{r[K^2 - (2N(t_0) - K)^2]}{4K} = \frac{rN(t_0)(K - N(t_0))}{K},$$

即应控制收获率 h 不要超过 $\frac{rN(t_0)(K - N(t_0))}{K}$, 否则将无鱼可捞. 从上面讨论知, 收获率与

种群密度是相关的, 密度小时收获率应该低. 我们可以假设 $h = kN$, k 称为捕捞率, $N_1 = N_2 =$

$\frac{K}{2}$ 是平凡解, 这时收获率 $h = \frac{rK}{4}$ 是最大的可承受的单位时间内的产量. 可见, 欲使池鱼不致

随时间增加而趋于灭绝, 又使产量最大, 仅当池中鱼数是最大可能鱼数之半时才可能. 这时,

从 $\frac{rN}{K}(K - N) - KN = 0$ 得平衡点为 $N = \frac{r-k}{r}K > 0$ ($r \leq k$ 则是“败家子式”捕捞), 于是 $\frac{rN}{K}(K -$

$N) = \frac{K}{2}$, 得 $r = 2k$, 即鱼的增长率是捕捞率的 2 倍时, 才达到最大收获量 $\frac{rk}{4}$.

5.1.2 无管理的鱼类捕捞模型

在严格计划管理的情况下, 最多捕多少鱼才能保证鱼池中的鱼量有一个稳定的值, 为了得到最大净收入而又保证鱼池中鱼数稳定, 又该捞多少, 都有严格的定量管理指标. 但是, 如果是在公海上捕鱼, 各条船可以任意捕捞, 捕鱼量的多少主要受市场价值规律的制约. 捕鱼赚钱多时, 捕鱼者增加, 于是市场上鱼多起来, 鱼价下跌, 捕鱼已没有多少钱好赚时, 捕鱼者锐减, 水域中鱼数开始回升, 在鱼的生存密度与捕鱼能力之间形成自反馈控制, 在这种不加管理的条件下, 捕鱼模型为:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{rN}{K}(K - N) - EN; \\ \frac{dE}{dt} = kE(pN - c), \end{cases} \quad (5.1.2)$$

其中, $N(t)$ 是鱼群密度, $E(t)$ 是捕鱼能力, p 是捕单位重量的鱼得到的报酬, c 是单位能力的成本, r, k 是正常数.

令

$$\begin{cases} \frac{rN}{K}(K - N) - EN = 0; \\ kE(pN - c) = 0, \end{cases}$$

解得奇点为 $(0, 0)$, $(K, 0)$, $\left(\frac{c}{p}, r\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)\right)$.

$K = \frac{c}{p}$ 时, 有两个奇点 $(0, 0)$, $(K, 0)$;

$K < \frac{c}{p}$ 时, 第一象限有两个奇点 $(0, 0)$, $(K, 0)$;

$K > \frac{c}{p}$ 时, 第一象限有上述三个奇点.

对于奇点(0,0), 特征方程为:

$$\begin{vmatrix} r-\lambda & 0 \\ 0 & -kc-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda_1 = r > 0, \lambda_2 = -kc < 0$, 所以(0,0)是鞍点.

对于奇点(K,0), 线性近似系统的系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} -r & -K \\ 0 & kpK - kc \end{pmatrix} = 0,$$

特征值为 $\lambda_1 = -r, \lambda_2 = k(pK - c)$.

当 $K < \frac{c}{p}$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, (K,0)是稳定结点, 又由式(5.1.2)知正半 E 轴、正半 N 轴是轨线, 但正半 N 轴上有一奇点(K,0); 第一象限内部无奇点, 故第一象限无闭轨, 不会形成鱼的密度与捕捞强度的周期性变化, 鱼群密度趋于最大值 K.

由于 $N \leq K, K < \frac{c}{p}$, 故 $\frac{dE}{dt} < 0$, $E(t)$ 单调下降.

下面讨论 $K > \frac{c}{p}$ 的情形, 这时除(0,0)与(K,0)两个奇点外, 还有一个奇点

$\left(\frac{c}{p}, r\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)\right)$, (0,0)仍为鞍点, 但这时对于(K,0), $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, (K,0)成了鞍点.

对于 $\left(\frac{c}{p}, r\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)\right)$, 线性近似系统的系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} P_N & P_E \\ Q_N & Q_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{cr}{Kp} & -\frac{c}{p} \\ pkr\left(1 - \frac{c}{Kp}\right) & 0 \end{pmatrix};$$

$$M = \left(\frac{c}{p}, r\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)\right),$$

特征方程为 $\lambda\left(\lambda + \frac{cr}{Kp}\right) + krc\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)$, 特征根为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{cr}{Kp} \pm \sqrt{\frac{cr^2}{Kp} - 4krc\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)} \right],$$

令 $\Delta = \frac{cr^2}{Kp} - 4krc\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)$, 则 $\Delta \geq 0$ 时, M 点是稳定结点, $\Delta < 0$ 时, M 点是稳定焦点.

取 Dulac 函数 $B(N, E) = E^{-1}N^{-1}$, 则:

$$\begin{aligned} (BP)_N + (BQ)_E &= E^{-1}N^{-1} \left[\frac{rN}{K}(K - N) - EN \right]_N \\ &\quad + E^{-1}N^{-1} [kE(pN - c)]_E \\ &= -\frac{r}{KE} < 0, \end{aligned}$$

所以系统(5.1.2)无闭轨, 不会出现鱼密度和捕鱼能力的周期性变化. 这时, 鱼群密度与捕鱼能力随时间增长都分别趋于常数而稳定.

结论是: $pK > c$ 时, 鱼的密度与捕鱼能力分别自反馈控制在 $\frac{c}{p}$ 与 $r\left(1 - \frac{c}{Kp}\right)$ 附近, 呈现稳定状态.

5.2 传染病的微分方程模型

我们在第3章已经简单介绍了传染病微分方程模型, 现在进一步讨论.

目前对传染病研究的方法主要有四种: 描述性研究、分析性研究、实验性研究和理论性研究. 传染病动力学是对传染病进行定性、定量研究的一种重要方法. 它是根据种群生长的特性, 疾病的发生及在种群内的传播、发展规律, 以及与之有关的社会等因素, 建立能反映传染病动力学特性的数学模型, 通过对模型动力学性态的定性、定量分析和数值模拟, 来显示疾病的发展过程, 揭示其流行规律, 预测其发展变化趋势, 分析疾病流行的原因和关键因素, 寻求对其预防和控制的最优策略, 为人们防制决策提供理论基础和数量依据. 与传统的统计学方法相比, 动力学方法能更好地从疾病的传播机理方面来反映流行规律, 能使人们了解流行过程中的一些全局性态. 传染病动力学与生物统计学及计算机仿真等方法相互结合、相辅相成, 能使人们对传染病流行规律的认识更加深入全面, 能使所建立的理论和防治策略更加可靠和符合实际 (well-posed problems).

对于不同疾病与不同种群和环境, 根据出生、死亡、传播、患病、治愈等规律的不同, 又可将模型分为线性、非线性、自治、非自治等类型, 而且同一模型的具体形式也会有所不同. 对这些模型的理论研究主要集中在解的适定性、疾病的持续生存、平衡位置特别是导致地方病的平衡位置和周期解的存在性和稳定性、再生数及分歧点的寻找等动力学性态.

在前面给出了如下模型, 可以具体讨论如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

将模型(5.2.3)中三个方程两端分别相加, 得:

$$\frac{d(S+I+R)}{dt} = 0,$$

从而 $S(t) + I(t) + R(t) = K$.

由于模型中前两个方程不含 R , 故实际上我们只需先讨论前面那两个方程

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \end{cases} \quad (5.2.4)$$

由于 $\frac{dS}{dt} < 0$ 单调递减且有下界, 故当极限 $t \rightarrow \infty$ 时有 $S(t) \rightarrow S_\infty$ 存在, 由方程(5.2.4)有:

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S}, \rho = \frac{\gamma}{\beta}, \quad (5.2.5)$$

可见当 $S = \rho$ 时, I 达到最大值.

令

$$R_0 = \beta \frac{1}{\gamma} S_0,$$

则当 $R_0 > 1$ 时, 疾病流行; 当 $R_0 < 1$ 时, 疾病不会流行, 染病者的数量将单调下降且趋向于 0. $R_0 = 1$ 是区分疾病流行与否的阈值. 应当指出, $\frac{1}{\gamma}$ 表示平均移出时间, 也就是平均患病周期.

事实上, 由移出率 γ 的定义可见, 若病人的数量为 n , 则单位时间内移出者的数目为 γn , 故经过时间 $\frac{1}{\gamma}$, 病人全部移出. 要防止疾病流行, 必须减少 R_0 使其小于 1, 这样可以加强治疗以缩短染病期 $\frac{1}{\gamma}$, 或者采取杀菌等措施以减少疾病的传染力 β , 或者通过隔离措施以减少与患病者可能接触的人数即这里的易感者数 S_0 来实现. 更为有效的方法是通过疫苗接种以使易感者成为免疫者而直接进入移出者类 R , 从而减少初始时刻易感者的数量 S_0 .

下面介绍传染病动力学模型的基本形式.

最基本的传染病动力学模型大致分为以下几类.

(1) 不考虑出生和自然死亡等种群动力学因素, 适宜于描述病程较短, 从而在疾病流行期间, 种群的出生和自然死亡率可以忽略不计的一些疾病.

① 无疾病潜伏期.

- SI 模型: 患病后难以治愈;
- SIS 模型: 患病后可以治愈;
- SIR 模型: 患病治愈后可以获得终身免疫力;
- SIRS 模型: 患者康复后只有暂时免疫力, 单位时间内将有 δR 的康复者丧失免疫力而可能再次被感染.

应当注意, SIRS 模型与 SIS 模型的区别在于: 后者无免疫期, 康复的患者会再次被感染, 而前者有暂时的免疫期, 患者康复后先进入具有免疫力的移出者类 R , 再以比例 δ 丧失免疫力而变成易感者.

② 有疾病潜伏期.

即在被感染后成为染病者类 $I(t)$ 之前有一段病菌潜伏期, 并且假定在潜伏期内没有传染力, 记 t 时刻潜伏期的人数为 $E(t)$ 疾病的平均潜伏期为 $\frac{1}{\omega}$.

- SEIR 模型: 患者康复后具有永久免疫力;
- SEIRS 模型: 患者康复后仅具有暂时免疫力.

(2) 添加种群动力学因素.

① 总人口恒定. 即在疾病流行期间, 考虑人口的出生和自然死亡率等变化, 但假定出生率系数 (即单位时间内出生的人数在总人数中的比例) 与自然死亡率系数相等, 且不考虑人口输入和输出及因病死亡, 从而总人口保持为一常数 K . 例如:

- SIR 无垂直传染模型: 即母亲的疾病不会传染给新生儿, 故新生儿均为易感者;
- SIR (有垂直传染且康复者的新生儿不具有免疫力) 模型.

② 总人口变化.

既考虑因病死亡、人口的输入和输出、出生率与自然死亡率不相等、密度制约等因素 (从

而总人口为时间 t 的函数 $N(t)$), 例如:

- SIS(有垂直传染且有输入和输出)模型;
- MSEIR 有先天免疫无垂直传染模型: 即由于母亲抗体对胎儿的作用, 使部分新生儿具有暂时的免疫力.

5.2.1 传染病学基本概念

1. 有效接触率与疾病发生率

现在来更细微地分析传染过程, 设病人传染是通过与他人接触形成的, 单位时间内一个病人与他人接触的次数称为接触率(contact rate), 它通常依赖于环境的总人口数 N , 记做 $U(N)$. 如果被接触者为易感者, 就会有一定程度的传染, 设每次接触传染的概率为 β_0 , 我们把赋有传染概率 β_0 的接触称为有效接触, 这时的接触率为有效接触率(adequate contact rate), 即 $\beta_0 U(N)$. 它表示一个病人传染他人的能力, 反映了病人的活动能力、环境条件及病菌的毒力等因素, 应当注意, 一般来说总人口中除易感者和患病者外还可能包含疾病免疫者和潜伏者. 当病人与非易感者接触时不会发生传染, 而易感者 S 在总人口 N 中所占比例为 $\frac{S}{N}$, 因此每一个病人平均对易感者的有效接触率为 $\beta_0 U(N) \frac{S}{N}$, 也就是每一个病人平均对易感者的传染率, 简称为传染率, 从而 t 时刻在单位时间内被所有病人传染的人数即新病人数为 $\beta_0 U(N) \frac{S(t)}{N(t)} I(t)$, 称为此疾病的发生率(incidence).

在实际应用中我们都假定接触率与环境人口总数成正比, 即 $U = kN$, 于是 t 时刻的有效接触率为 $\beta_0 kN = \beta N$, 其中 $\beta_0 k = \beta$ 是有效接触率在总人口数 N 中所占比例, 称为有效接触率系数或传染率系数, 从而 t 时刻在单位时间内所产生的新病人数即疾病的发生率为 $\beta N(t) \frac{S(t)}{N(t)} I(t) = \beta S(t) I(t)$, 所以当有效接触率为 βN 时, 发生率为 βSI , 这种发生率称为双线性(bilinear)发生率或简单质量作用律(simple mass action law)发生率.

当人口数量很大时, 与人口成正比的接触率显然是不符合实际的, 因为单位时间内一个病人所能接触他人的数目是有限的, 这时通常假定接触率为一常数 k , 即有效接触率为 $\beta = \beta_0 k$, 从而疾病的发生率为 $\beta \frac{S}{N} I$, 这种发生率为标准(standard)发生率.

介于双线性发生率与标准发生率之间, 还有一种更符合实际的饱和接触率:

$$U(N) = \frac{\alpha N}{1 + \omega N},$$

当 N 较小时它与 N 近似成正比, 随着 N 得增大而逐渐达到饱和, 当 N 很大时, 它近似于常数 $\frac{\alpha}{\omega}$.

Levin 等人还曾直接采用过以下形式的发生率:

$$\beta I^p S^q \quad \text{或} \quad \frac{\beta I^p S^q}{N}.$$

总之, 在研究某种具体的传染病时采用何种形式的接触率和发生率, 应视具体疾病和环境等因素, 根据所获得的数据而定, 种群动力学许多形式的功能性反应函数, 也许能启迪我

们针对不同的疾病和环境而构造更多形式的接触率.

2. 基本再生数与有效接触数

在 $K-M$ 的 SIR 模型中我们求得了区分疾病是否流行的阈值 $R_0 = 1$, 当 $R_0 < 1$ 时疾病逐渐消失, 当 $R_0 > 1$ 时疾病始终保持, 成为地方病, 注意到 $\frac{1}{\gamma}$ 是病人的平均患病期, 可见 R_0 表示在发病初期所有人均为易感者, 一个病人在平均患病期内所传染的人数称为基本再生数. $R_0 = 1$ 作为疾病是否消亡的阈值其实际含义是十分明确的, 当 $R_0 < 1$ 即一个病人在平均患病周期能传染的最大人数小于 1 时, 疾病自然逐步消亡; 反之, 若 $R_0 > 1$, 疾病将始终存在而形成地方病.

所谓有效接触数是指一个病人在其患病期内平均有效接触他人的数目, 记做 σ , 所以 $\sigma = \beta_0 U \frac{1}{\gamma}$, 其中 $\beta_0 U$ 为有效接触率, $\frac{1}{\gamma}$ 为平均染病周期, 应当注意, 有效接触并不一定传染, 只有对易感者有效接触时才传染.

5.2.2 传染病模型

1. 总人口是常数的传染病模型

(1) SIR 传染病模型.

考虑有出生和死亡的 SIR 模型, 设 N 为总人口, S 是易感者类及其数量, I 是染病者类及其数量, R 是移出者类及其数量, 则总人口满足:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), \quad (5.2.6)$$

进一步假设在疾病流行期间人口的出生率系数和自然死亡率系数相等, 其值为 μ , 因不考虑因病死亡率, 且假设新生儿都是易感者, 疾病的发生率为双线性 λSI , γ 为恢复率系数. 染病者移出后不再被传染, 其 Kermack-McKendrick 的 SIR 仓室模型为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \lambda SI - \mu S; \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I - \mu I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{cases} \quad (5.2.7)$$

将模型(5.2.7)中三个方程两端分别相加, 得:

$$\frac{d(S + I + R)}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0,$$

从而

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1,$$

由于模型中前两个方程不含 R , 故实际上我们只需讨论系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \lambda SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I - \mu I. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

由 S, I 的实际意义容易看出区域 $D = \{(S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0, I + S \leq 1\}$ 为系统的正向不变集, 即 $t=0$ 时从 D 内出发的轨线在 t 增加时不会跑到 D 的外面, 显然 $P_0(1, 0)$ 为系统 (5.2.8) 的一个奇点, 称疾病消除平衡点, 当 $\sigma = \frac{\lambda}{\mu + \gamma} > 1$ 时, 系统有地方病平衡点 $P_1\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{\mu(\sigma - 1)}{\lambda}\right)$.

当 $\sigma < 1$ 时, 由系统 (5.2.8) 的第二式得:

$$\frac{dI}{dt} = (\gamma + \mu)I(\sigma S - 1)$$

当 $I > 0$ 时, $S < 1$ 可知:

$$\frac{dI}{dt} \leq (\gamma + \mu)I(\sigma - 1).$$

由此可得 $I(t) \leq I(0)e^{(\gamma + \mu)(\sigma - 1)t}$, 故当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $I(t) \rightarrow 0$.

为了讨论 $\sigma < 1$ 时不变集 D 内轨线的变化, 用系统 (5.2.8) 的垂直等倾线:

$$L: S(\mu + \lambda I) = \mu.$$

将区域划分为两部分: D_1, D_2 , 在曲线 L 上:

$$\frac{dS}{dt} = 0; \text{ 在 } D_1 \text{ 中,}$$

$$\frac{dS}{dt} < 0; \text{ 在 } D_2 \text{ 中,}$$

$$\frac{dS}{dt} > 0.$$

由于 $I(t) \rightarrow 0$, 故 D_1 中出发的轨线必定在某一时刻之后进入 D_2 , 又因为是 D 不变区域, 且 L 上的轨向是从上方垂直穿向下方的, 故 D 中的轨线必定最后进入 D_2 且永远留在 D_2 之中.

$$\frac{dS}{dt} > 0$$

和

$$S(t) \leq 1$$

这些事实可知 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $S(t) \rightarrow 1$,

这表明当 $\sigma < 1$ 时, 疾病消除平衡点在 D 内是全局渐近稳定的. 当 $\sigma > 1$ 时, 疾病消除平衡点 P_0 不稳定, 为讨论地方病平衡点的稳定性, 构造 Lyapunov 函数:

$$V(S, I) = \frac{1}{2} \left(\frac{S - S_1}{S_1} \right)^2 + \sigma \left(I - I_1 - I \ln \left(\frac{I}{I_1} \right) \right),$$

其中 $S_1 = \frac{1}{\sigma}$, $I_1 = \frac{\mu(\sigma - 1)}{\lambda}$. 容易验证 $V(S, I)$ 是无穷大正定函数, 可得 $V(t)$ 沿系统 (5.2.8) 轨线的导数为:

$$\begin{aligned} & \frac{dV(S, I)}{dt} \\ &= \frac{1}{S_1^2} (S - S_1) (\mu - \lambda SI - \mu S) + \sigma (I - I_1) (\lambda S - \gamma - \mu) \\ &= -\frac{\mu + \lambda I}{S_1^2} (S - S_1)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

$S = S_1$ 不是系统(5.2.8)的轨线, 故平衡点 P_1 是全局渐近稳定的, 即当 $\sigma > 1$ 时, 患者和易感者最终会趋于一个常数.

(2) SIRS 传染病模型.

考虑总人口是常数 K 的 SIRS 模型, 相应的动力学方程为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bN - \beta SI - bS + \alpha R; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - bR - \alpha R, \end{cases} \quad (5.2.10)$$

其中, α 是丧失免疫的系数, 简称免疫丧失率系数, 模型(5.2.3)与模型(5.2.10)的主要区别在于后者考虑了移出者类 R 丧失免疫力而再次被感染, 从方程(5.2.10)可以看出总人口 N 仍然为常数, 即:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = K.$$

把 $R = K - S - I$ 代入方程(5.2.10)可得:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (b + \alpha)K - \beta SI - (b + \alpha)S - \alpha I; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI. \end{cases} \quad (5.2.11)$$

方程(5.2.11)有无病平衡点 $E_0(K, 0)$, 且当 $R_0 = \frac{\beta K}{b + \gamma} > 1$ 时, 也存在地方病平衡点 $E_+ \left(\frac{b + \gamma}{\beta}, \frac{(b + \alpha)[\beta K - (b + \gamma)]}{\beta(b + \alpha + \gamma)} \right)$.

定理 5.2.1 对方程(5.2.11), 若 $R_0 \leq 1$, 则地方病平衡点不存在, 无病平衡点 E_+ 全局渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定, 地方病平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

证:

(1) 当 $R_0 = \frac{\beta K}{b + \gamma} \leq 1$ 时, 方程(5.2.11)在 D 内有唯一的无病平衡点 $E_0(K, 0)$, 在 E_0 点, 方程的线性化系统的系数矩阵有两个特征根, 分别为 $\lambda_1 = -(b + \alpha)$, $\lambda_2 = \beta K - b - \gamma$, 故当 $R_0 \leq 1$ 时, 平衡点 E_0 局部稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 E_0 不稳定.

下面证明在 $R_0 \leq 1$ 时, E_0 是全局吸引的.

构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = I(t),$$

则 $V(t)$ 沿系统(5.2.11)轨线的导数为:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} = [\beta S - (b + \gamma)]I \leq [\beta K - (b + \gamma)]I.$$

显然, 在 E 中系统(5.2.11)的最大不变集 $M = \{(S, I, R) | I = 0\}$, 由 Lasalle 不变性原理知当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $I(t) \rightarrow 0$. 故系统(5.2.11)的极限方程为:

$$\frac{dS}{dt} = (b + \alpha)(K - S),$$

注意到该方程平衡点 $S = K$ 是全局渐近稳定的, 故由极限方程知 $E_0(K, 0)$ 是全局吸引的, 因此结合 $E_0(K, 0)$ 的局部稳定性知, $E_0(K, 0)$ 为全局渐近稳定的.

(2) 当 $R_0 > 1$ 时, 由前面的讨论知当 $E_0(K, 0)$ 不稳定, 下面利用 Lasalle 不变性原理证明: 当 $R_0 > 1$ 时正平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

为证明方便, 做变换 $x = S + \frac{\alpha}{\beta}$, $y = I$, 则方程(5.2.11)变为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (b + \alpha) \left(K + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \beta xy - (b + \alpha)x; \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - (b + \gamma + \alpha)y, \end{cases} \quad (5.2.12)$$

对应于方程(5.2.11)的正平衡点 E_+ , 方程(5.2.12)有正平衡点 $\left(S^+ + \frac{\alpha}{\beta}, I^+ \right) = (x_0, y_0)$, 且 x_0 为正. 考虑 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} \omega_1 (x - x_0)^2 + \omega_2 \left(y - y_0 - y_0 \ln \frac{y}{y_0} \right),$$

其中, $\omega_i > 0, i = 1, 2$, 则 $V(t)$ 沿方程(5.2.12)解的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= -\omega_1 \beta (x - x_0)^2 y - \omega_1 (b + \alpha) (x - x_0)^2 \\ &\quad + \beta (x - x_0) (y - y_0), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

取 $\omega_2 = \omega_1 x_0$, 且 $\omega_1 > 0$ 任取, 则:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\omega_1 (x - x_0)^2 [\beta y + b + \alpha] \leq 0,$$

显然, $E = \{(x, y) | x = x_0\}$.

容易看出, 系统(5.2.12)在 E 中的最大不变集 M 只有唯一的点 (x_0, y_0) , 由 Lasalle 不变性原理知, (x_0, y_0) 为全局渐近稳定. 因此方程(5.2.11)的正平衡点 E_+ 在 $R_0 > 1$ 时为全局渐近稳定的.

2. 总人口是非常数的传染病模型

早期的传染病模型大多假设种群总数为常数, 这种假设仅当疾病在种群中的传播速度很快且流行时间较短, 短期内没有出生和死亡或出生率和死亡率能够相互平衡, 且因疾病死亡率不大而可以忽略不计, 环境封闭等条件下才成立的. 但在实际问题中, 无论是动物还是植物, 其数量都是随着外界(如种群的迁入和迁出)和内部(如种群内的相互作用、资源的限制、疾病的因病死亡)扰动而发生变化的. 当疾病流行时间较长时, 则应该考虑种群总数变动这一因素. 从数学上看, 这类模型的研究更加困难, 因为种群总数的变化增加了方程的维数.

当总人口 $N(t)$ 在变化时, $N(t)$ 一般满足连续动力学模型:

$$\frac{dN(t)}{dt} = B(N) - D(N), \quad (5.2.14)$$

其中, $B(N)$ 和 $D(N)$ 是 N 的连续函数, 它们取不同的表达形式反映不同的人口动力学情况, 如取 $B(N) = bN$, $D(N) = dN$, 则表示人口的出生和死亡率都与人口的数量成正比, 比例系数分别为 b 和 d , 此时模型(5.2.14)称为指数出生和死亡的人口动力学模型. 若取 $B(N) = A$, $D(N) = dN$, 则表示人口中有一个常数输入率为 A 和一个与人口成正比的死亡率 dN , 相应的人口动力学模型(5.2.14)称为常数输入和指数死亡的模型. 取 $B(N) = bN - (b - d) \frac{N^2}{K}$,

$D(N) = dN + (b-d)\frac{N^2}{K}$, 其中 K 为环境容纳量, 则称相应的模型 (5.2.14) 为满足 Logistic 方程的人口动力学模型.

本段只考虑两类具有常数输入和指数死亡的 SIRS 传染病模型: 一类是疾病的发生率是双线性的 SIRS 传染病模型; 另一类是疾病的发生率是标准的 SIRS 模型.

首先, 考虑疾病的发生率是双线性的 SIRS 传染病模型.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - dS + \delta R; \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + d + \alpha) I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\delta + d) R, \end{cases} \quad (5.2.15)$$

其中, α 是因病死亡率系数, γ 是恢复率系数, d 是自然死亡率系数, δ 是失去免疫力系数, A 是常数输入率系数.

定义 $R_0 = \frac{\beta\left(\frac{A}{d}\right)}{\gamma + \alpha + d}$ 易证当 $R_0 \leq 1$ 时, 方程 (5.2.15) 有唯一的平衡点 $E_0\left(\frac{A}{d}, 0, 0\right)$;

当 $R_0 > 1$ 时, 方程 (5.2.15) 有两个平衡点 E_0 和 $E_+(S^+, I^+, R^+)$,

$$S^+ = \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\beta}, \quad I^+ = \frac{d(\gamma + \alpha + d)(R_0 - 1)}{\beta[\alpha + d\left(1 + \frac{\gamma}{\delta + d}\right)]}, \quad R^+ = \frac{\gamma I^+}{\delta + d},$$

显然 R_0 为基本再生数.

关于平衡点 E_0 和 E_+ 的稳定性有下面的定理.

定理 5.2.2 对方程 (5.2.15), 若 $R_0 \leq 1$, 无病平衡点 E_0 在 D 内全局渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 E_0 在 D 内不稳定, 地方病平衡点 E_+ 在 D 内局部渐近稳定, 特别当 $\delta = 0$ 时, E_+ 在 D 内除平面 $I = 0$ 外全局渐近稳定.

下面考虑具有常数输入和指数死亡且疾病的发生率是标准形式的 SIRS 传染病模型, 其微分方程模型为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \lambda \frac{SI}{N} - dS + \delta R; \\ \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - (\gamma + d + \alpha) I; \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\delta + d) R, \end{cases} \quad (5.2.16)$$

模型有基本再生数:

$$R_0 = \frac{\lambda}{\gamma + \alpha + d},$$

方程 (5.2.16) 恒有无病平衡点 $E_0\left(\frac{A}{d}, 0, 0\right)$, 当 $R_0 > 1$ 时, 有地方病平衡点 $E_+(S^+, I^+, R^+)$,

其中:

$$S^+ = \frac{N^+}{R_0}; \quad I^+ = \frac{N^+ \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{1 + \frac{\gamma}{\delta + d}};$$

$$R^+ = \frac{\gamma N^+}{\delta + d}; \quad N^+ = \frac{A}{d + \frac{\alpha(\delta + d)\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{\delta + d + \gamma}}$$

定理 5.2.3 当 $R_0 \leq 1$ 时, 方程(5.2.16)存在唯一的平衡点 E_0 且全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 方程(5.2.16)存在两个平衡点 E_0 和 E_+ , 其中 E_0 为不稳定, E_+ 为局部渐近稳定, 当 $\alpha = 0$ 时, E_+ 为全局渐近稳定.

5.3 综合国力的微分方程模型

考虑社会文明和社会丑恶现象的制约机制, 建立一个综合国力的非线性数学模型, 从数学上讨论相应的二维微分系统的 hopf 分支、中心和细焦点的判定、极限环的存在性和唯一性等问题, 并对数学结论给予合理的解释, 把社会相平面划分为社会发展区域、社会动荡区域和社会崩溃区域, 研究社会走向, 确定社会发展区域的途径.

5.3.1 数学建模

一个国家的物质文明和精神文明综合而成的社会文明或综合国力, 其已经有的水平及其走向决定该国的强弱兴衰. 定量地研究该国的综合国力, 可以为本国内政与外交政策的制定提供重要依据. 作为当今重大科研课题, 美国、日本、中国和欧洲各主要国家都在组织科学家进行研究. 1981 年, 乔治敦大学战略与国际研究中心主任、美国中央情报局前副局长克莱因教授给出综合国力公式:

$$P_p = (C + E + M)(S + W),$$

其中, P_p 是综合国力, C 是基本实力, E 是经济实力, M 是军事实力, S 是战略意图, W 是贯彻国家战略的意志. 1987 年, 日本综合研究所出版的《日本综合国力》一书, 其国力方程为:

$$P = (C + E + M)(G + D),$$

其中, G 是国内政治能力, D 是外交能力, 上面两式对已有的国力进行度量, 为考虑时间因素所引起的发展和变化, 无预报功能.

我国著名军事未来学家黄硕风教授, 1988 年在《美苏争霸战略问题》一文中引入国力变化的微分动力学模型, 其国力主方程为 Logistic 方程:

$$\frac{dy_t}{dt} = \rho y_t \left(1 - \frac{y_t}{M}\right),$$

其中, y_t 是国力函数, 黄硕风教授还给出了国力要素中一系列子方程. 我们基于社会发展的动力学思想, 建立综合国力的二次微分系统来探讨综合国力的长消规律. 称 $X(t)$ 为硬国力函数, $X(t)$ 为某国物质文明(资源、经济、军事、科技等), $X(t)$ 越大, 物质文明越繁荣, $X(t) = X_0$ 是正常数, 表示 $X(t)$ 为警戒线.

称 $y(t)$ 为软国力函数, $y(t)$ 是某国精神文明的一个综合指标, $y(t) > 0$ 对应社会丑恶现象(决策失误、教育失败、官贪民盗等)这时软国力对社会发展有阻滞作用; $y(t) < 0$, 软国力优越(决策英明、国民素质高等), 对社会发展有促进作用.

记 $x(t) = X(t) - X_0$, 则有 $-X_0 \leq x(t) \leq M = \text{costant}$, 在一定的简化层次上, 我们建立了下面的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(\frac{M-x}{M} \right) - \beta y; \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta(m-x)x, \end{cases} \quad (5.3.17)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, m, M$ 是正常数, $m < M$. 建模思想如下.

物质文明的发展速度 $\frac{dx}{dt}$ 与现有的文明水准 $x(t)$ 及发展潜力的份额 $\frac{M-x}{M}$ 成正比, 于是有

$\alpha x \frac{M-x}{M}$ 这一项, α 称为增长系数.

$-\beta y$ 表示社会丑恶现象对物质文明发展的阻滞, β 称为丑恶系数.

$-\gamma y$ 表示人民与政府对丑恶现象的抵制和治理力度, 与现存的丑恶现象多寡成正比, γ 为统治系数.

$\delta(m-x)x$ 表示物质文明不足时, 丑恶现象随 $x(t)$ 的增长而加剧, 但物质文明足够大以后, 丑恶现象随 $x(t)$ 的增加而减少.

记

$$u(t) = \frac{x(t)}{M}, \quad v(t) = \frac{y(t)}{M}, \quad \beta t = \tau, \quad (5.3.18)$$

则式(5.3.17)变为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{\alpha}{\beta} u(1-u) - v; \\ \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\gamma}{\beta} v + \frac{\delta M}{\beta} \left(\frac{m}{M} - u \right) u, \end{cases} \quad (5.3.19)$$

又令:

$$a = \frac{\alpha}{\beta}, \quad b = \frac{\gamma}{\beta}, \quad c = \frac{\delta M}{\beta}, \quad \mu = \frac{m}{M},$$

仍把 τ 写成 t , 得:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au(1-u) - v; \\ \frac{dv}{dt} = -bv + c(\mu - u)u, \end{cases} \quad (5.3.20)$$

式(5.3.19)与式(5.3.20)的相图拓扑同胚.

5.3.2 数学分析

我们来讨论式(5.3.20)轨线的性质.

定理 5.3.1 若 $a \leq b$, 则系统(5.3.20)无闭轨.

证: 取 Dulac 函数 $B(u, v) = e^{ku+lv}$, 则:

$$D = e^{ku+lv} \{ (a-b) + [ka + cl\mu - 2a]u - (k+bl)v - (ka+cl)u^2 \}.$$

令

$$ka + cl\mu - 2a = k + bl = 0,$$

注意到由 $\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4\beta\delta} < m$ 可知 $c\mu > ab$, 可得:

$$k = \frac{-2ab}{c\mu - ab}; \quad l = \frac{2a}{c\mu - ab},$$

于是:

$$D = e^{ku+lv} [a - b - (ka + cl)u^2],$$

而

$$ak + cl = \frac{2a(c - ab)}{c\mu - ab} > 0,$$

所以当 $a \leq b$ 时 $D \leq 0$, 等号仅在 $a = b$ 且 $u = 0$ 时发生. 显然由 Dulac 准则可知, 方程组 (5.3.20) 无闭轨.

定理 5.3.2 方程组有两个有限奇点 $(0,0)$ 和 $(u_0, v_0) = \left(\frac{ab - c\mu}{ab - c}, au_0(1 - u_0)\right)$, (u_0, v_0) 在第一象限, 是鞍点, $(0,0)$ 当 $a < b$ 时是稳定粗焦点.

证: 令

$$\begin{cases} au(1 - u) - v = 0; \\ -bv + c(\mu - u)u = 0, \end{cases}$$

得有限奇点 $(0,0)$ 和 $(u_0, v_0) = \left(\frac{ab - c\mu}{ab - c}, au_0(1 - u_0)\right)$, 由于 $m > \frac{(\alpha + \gamma)^2}{4\beta\delta}$, 于是 $ab - c\mu < 0$, $ab - c < 0$, $\frac{ab - c\mu}{ab - c} > 0$, 又 $\mu < 1$, 故 $u_0 < 1$, $au_0(1 - u_0) > 0$, 即 (u_0, v_0) 在第一象限内.

令 $\xi = u - u_0$, $\eta = v - v_0$, 则式 (5.3.20) 变成

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a(1 - 2u_0)\xi - \eta - a\xi^2; \\ \frac{d\eta}{dt} = c(\mu - 2u_0)\xi - b\eta - c\xi^2, \end{cases} \quad (5.3.21)$$

其线性近似系统的特征方程为

$$\lambda^2 + [b - a(1 - 2u_0)]\lambda + c(\mu - 2u_0) - ab(1 - 2u_0) = 0,$$

其中, 常数项 $c(\mu - 2u_0) - ab(1 - 2u_0) = ab - c\mu < 0$, 故特征根是异号实数, (u_0, v_0) 为鞍点. 对于 $(0,0)$ 点, 特征方程为 $\lambda^2 + (b - a)\lambda - ab + c\mu = 0$ 其特征根为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{[a - b + \sqrt{(a - b)^2 + 4(ab - c\mu)}]}{2}; \\ \lambda_2 &= \frac{[a - b - \sqrt{(a - b)^2 + 4(ab - c\mu)}]}{2}, \end{aligned}$$

由于 $m > \frac{(\alpha + \gamma)^2}{4\beta\delta}$, 故 $(a - b)^2 + 4(ab - c\mu) < 0$, 即 λ_1 与 λ_2 是实部为小于零的共轭复数, 所以当 $a < b$ 时, $(0,0)$ 是稳定的粗焦点.

定理 5.3.3 方程组当 $a = b$ 时, $(0,0)$ 是稳定的一阶细焦点, 当 $a > b$ 时, $(0,0)$ 是不稳定粗焦点, 当 $0 < a - b \ll 1$ 时, $(0,0)$ 外围存在唯一极限环, 是单重稳定环, 当 $a - b > \frac{a(c\mu - ab)}{c - ab}$ 时, $(0,0)$ 外围无极限环.

5.3.3 社会意义

在 $\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4\beta\delta} < m < M$ 的条件下.

(1) $a \leq b$, 统治系数大于增长系数, 原点在 社会动荡区域, 在社会动荡区域, 随着时间的推移, 社会状态螺旋式动荡, 丑恶现象趋于无, 但物质文明水平也趋于贫困线.

(2) $a > b$, $a - b \leq 1$, 增长系数略高于统治系数, 在社会动荡区域内, 物质文明的多寡、精神文明的优劣、螺旋式动荡趋于一个稳定的极限环, 顽固地进行着拟周期或周期动荡.

(3) $(a - b) > \frac{a(cu - ab)}{c - ab}$, 增长系数明显高于统治系数, 则社会相平面只划分为社会发展区域和社会崩溃区域, 而原点处于社会崩溃区域, 在原点附近, 社会丑恶现象并不严重, 甚至社会风气也比较良好, 但社会仍然趋于崩溃! 在原点附近, 社会的物质文明和精神文明都不发达, 这种国家不可只追求发展经济和军事而对社会的治理相对削弱, 增长系数明显高于统治系数时对于国家的前途十分有害.

(4) 如果社会状态处于社会发展区域, 在有限的时间内物质文明趋于上界, 社会丑恶现象收敛, 发展成道德高尚、国家富强的理想社会.

(5) 如果社会状态处于社会崩溃区域, 即使当初社会物质文明繁荣甚至在上界附近, 随着时间的推移, 物质文明趋于崩溃线, 国家将崩溃.

(6) 若社会状态不在社会发展区域, 则应该进行社会变革, 加大改革与治理的力度, 可以考虑:

① 暂时停滞经济军事等事业的发展, 尽全力把社会丑恶现象打压下去, 即暂时使 $x(t)$ 保持不变, 使 $y(t)$ 减少;

② 若社会丑恶现象的严重程度低, 则只需要维持, 不需要加重, 而全力发展经济等物质文明, 使社会状态纳入社会发展区域;

③ 对对策(1)、(2)的联合实施.

不同的国家对应不同的参数组 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, m, M\}$, 为了定量地研究某国家的综合国力 $(x(t), y(t))$, 应该首先把该国的参数组确定出来, 但是参数组的确定过程比较复杂, 这里不再详述.

5.4 作战模型

第一次世界大战期间, F. W. Lanchester 提出了几个关于空战战术的尝试性数学模型. 从那以后, 人们不断推广这些模型, 用于描述各种竞争(从孤立的战斗直到整个战役、战争). 下面将介绍部分简单的模型.

5.4.1 Lanchester 战斗模型

一支 x 部队和一支 y 部队互相交战. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个部队在 t 时刻的力量, 其中 t 从战斗开始时以天计算. 将“力量”量化是不容易的, 因为它包括: 士兵数量、战斗准备、武器性能和数量、指挥员的素质及大量心理的和无形的因素. 这些因素很难转化成数量, 我们采用一种简单的回避方法, 即把 $x(t)$ 和 $y(t)$ 看做士兵数量.

我们假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 连续变化, 并且为时间的可导函数. 当然, 这是真实状况的一种理想化, 因为兵力是整数, 而且随着时间整数地变化. 同时做以下假设.

(1) 部队的自然损失率为: OLR(即包括各种不可避免的疾病、开小差, 以及其他非作战事故引起的损失率);

(2) 部队的战斗损失率为:CLR(表示在与敌对部队发生战斗而产生的损失率);

(3) 部队的补充率为:RR(表示根据各种情况而对部队人员的补充).

这样我们就可以得出一个部队的兵力的变化方程:

$$\frac{dx}{dt} = -(\text{OLR} + \text{CLR}) + \text{RR}. \quad (5.4.22)$$

y 部队也有一个类似的方程.

现在的问题是要求出关于每个部队的这些变化率的适当公式, 然后分析相关微分方程的解 $x(t)$ 和 $y(t)$, 从而确定谁将“赢得”战斗. 下面设定符合:

(1) 用 a, b, c, d, h, g 表示非负损失率常数;

(2) 用 $P(t), Q(t)$ 表示以兵力数量计算的每天的补充率;

(3) 用 $x(t), y(t)$ 表示 t 时刻双方部队的战斗力;

(4) 用 x_0, y_0 表示战斗开始时双方部队的战斗力;

(5) 用 t 表示按天计算的战斗时间. 我们给出第一个作战模型, 称之为常规战模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t); \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t), \end{cases} \quad (5.4.23)$$

其中, $-ax(t), -dy(t)$ 表示的是部队的自然损失率, 在没有战斗和补充的情况下, $-ax(t), -dy(t)$ 产生了不变的相对损失率:

$$\begin{cases} \frac{dx/dt}{x} = -a; \\ \frac{dy/dt}{y} = -d, \end{cases} \quad (5.4.24)$$

$-cx(t), -by(t)$ 表示部队的战斗损失率, 一支常规的 x 部队在战斗中的损失率形式为 $-by(t)$, 其中 b 是 y 部队的战斗效果系数. 在战斗中, 没有自然损失和人员补充, 那么 y 部队中每个兵员所造成的 x 部队的战斗损失率为:

$$\frac{dx/dt}{y} = -b; \quad (5.4.25)$$

这样, b 就是 y 部队中每个成员在战斗中的平均效果的一个度量. $-cx(t)$ 同样有类似的解释.

计算战斗效果系数 b, c 并不是一件简单的事情, 一种方法就是令:

$$\begin{cases} b = r_y p_y, \\ c = r_x p_x \end{cases} \quad (5.4.26)$$

其中, r_x, r_y 分别表示 x, y 部队的射击速度, p_x, p_y 分别表示一次射击杀死敌人的概率. 由此看出, 系数 b 由 y 部队决定, 系数 c 由 x 部队决定.

如果战争是游击战, 那么战斗损失率就可能是非线性的. 因为, 设 $x(t)$ 表示一支敌人看不见且有一块固定占领区 R 的游击队. 敌人向 R 内射击但无法知道什么时候产生伤亡. 有理由认为: 游击队的战斗损失率应与 R 内自己人员的数量 $x(t)$ 成比例; 且 $x(t)$ 越大, 被敌人杀死的概率就越大. 另外, 游击队 x 的战斗损失率还与敌人的战斗力 $y(t)$ 成比例. 这样游击队的战斗损失率为:

$$-gx(t)y(t).$$

我们给出第二个作战模型, 称之为游击战模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t); \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) - hx(t)y(t) + Q(t), \end{cases} \quad (5.4.27)$$

我们类似地讨论游击队 x 的敌手 y 的战斗效果系数 g . 要比估计由式(5.4.26)给出的系数复杂. 我们仍可以利用 r_y , 但 p_y 不再是由 y 部队完全确定的了, 杀死游击队 x 的一个成员的概率与 y 的一次射击的有效面积 A_{ry} 成正比, 而与游击队占领区的面积 A_x 成反比, A_{ry} 为单个游击队员在掩蔽体中其身体暴露部分的面积; 这样我们得到 g 的比较合理的公式为:

$$\begin{cases} g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}; \\ h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y} \end{cases} \quad (5.4.28)$$

同时, 如果发生了侵略战争, 则会出现两种形式结合的作战形式, 我们可以结合上面两种给出第三种作战模型——混合型模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t); \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t), \end{cases} \quad (5.4.29)$$

5.4.2 常规战模型讨论

我们讨论简化的作战模型, 假设两只孤立的常规部队正在交战, 假设自然损失率为零, 双方没有增援, 这种情况下, 模型(5.4.23)就简化为简单的线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t); \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t), \end{cases} \quad (5.4.30)$$

我们可以将方程组两式相除, 可以得到:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \quad (5.4.31)$$

分离变量并积分可得:

$$\begin{aligned} b \int_{y_0}^{y(t)} y dy &= c \int_{x_0}^{x(t)} x dx \\ b(y^2(t) - y_0^2) &= c(x^2(t) - x_0^2). \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

相互对抗的部队之间的这种二次关系, 称这个模型为“平方律模型”.

设 K 表示常数 $by_0^2 - cx_0^2$. 由式(5.4.32)得到:

$$by^2(t) - cx^2(t) = K. \quad (5.4.33)$$

很明显, 方程的解满足这样的等式, 其图形是一双曲线(若 $K=0$, 则为一对直线), 大家可以自行画出它的图形(只考虑第一象限, 因为兵力都为正, 即 $x \geq 0, y \geq 0$).

我们认为如果一支部队先被消灭, 我们就说另一支部队获胜. 那么如果 $K > 0$, 则由式(5.4.33)可知, 当 $y = \sqrt{K/b}$ 时, $x=0$, 即 x 部队被消灭, 所以 y 获胜. 同理可以讨论其他情况.

那么也就是说, y 部队想要获胜, 就应该使得 $K > 0$, 即

$$by_0^2 > cx_0^2. \quad (5.4.34)$$

根据式(5.4.26)的 b 、 c 的关系式有:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x}{r_y} \times \frac{p_x}{p_y} \quad (5.4.35)$$

这就是 y 部队获胜的保证, 假设两支部队都训练有素, 并且处于良好的作战状态, 那么, 很难看出作战双方对式(5.4.35)的右边有多大影响. 而式(5.4.35)的左边的平方说明, 初始兵力比例 y_0/x_0 的变化被平方地放大了. 而增大这个兵力比例就变成取胜的关键. 正是这个作用使得达到一个有利的局部力量对比成为战斗中重要的一环, 这也是我们常说的“集中优势兵力”.

同上, 如果两支游击队在作战中均无自然损失和增援, 那么模型简化为非线性动态系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gxy; \\ \frac{dy}{dt} = -hxy, \end{cases} \quad (5.4.36)$$

而两式相除得到一个简单方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g},$$

积分可得:

$$g(y(t) - y_0) = h(x(t) - x_0). \quad (5.4.37)$$

可以看出, 非线性方程组(5.4.36)的解符合线性关系, 称此模型为线性作战模型.

令 $L = gy_0 - hx_0$, 则式(5.4.37)可写成:

$$gy - hx = L. \quad (5.4.38)$$

与前面的讨论类似, 当 $L > 0$ 时, 那么 y 部队将获胜. 大家自己可以对此进行讨论, 这儿留做练习.

最后我们讨论第三种模型, 当一支游击部队与一支常规部队交战, 我们可以简化模型为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gxy; \\ \frac{dy}{dt} = -cx, \end{cases} \quad (5.4.39)$$

同样的方法可以得到:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy}. \quad (5.4.40)$$

解得:

$$gy^2 = 2cx + M. \quad (5.4.41)$$

其中 $M = gy_0^2 - 2cx_0$. 同样, 如果 $M > 0$, 常规部队 y 将获胜.

第 6 章 常微分方程边值问题

当定解条件在多个点上给出时,称为边界条件,微分方程与相应的边界条件一起构成了边值问题. 常微分方程边值问题是常微分方程中的一个重要分支,它在工程技术中有广泛应用. 因篇幅所限,这里仅以二阶线性方程的边值问题为例,介绍一些这方面的基础知识和基本解法.

6.1 边值问题基本概念

6.1.1 边值问题的提法

考虑微分方程:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad (6.1.1)$$

及对应的齐次方程:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (6.1.2)$$

其中, $p(t), q(t), f(t)$ 均是 $[a, b]$ 上的连续函数. 考虑边界条件的一般形式:

$$U_i[x] \equiv \alpha_{i1}x(a) + \beta_{i1}x(b) + \alpha_{i2}x'(a) + \beta_{i2}x'(b) = \gamma_i, (i=1, 2), \quad (6.1.3)$$

或对应的齐次边界条件:

$$U_i[x] = 0, (i=1, 2), \quad (6.1.4)$$

其中, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} (i, j=1, 2)$ 均为已知常数.

称下列定解问题:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = 0; \\ U_i[x] = 0 \quad (i=1, 2), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t); \\ U_i[x] = \alpha_{i1}x(a) + \beta_{i1}x(b) + \alpha_{i2}x'(a) + \beta_{i2}x'(b) = \gamma_i \quad (i=1, 2), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = 0; \\ U_i[x] = \alpha_{i1}x(a) + \beta_{i1}x(b) + \alpha_{i2}x'(a) + \beta_{i2}x'(b) = \gamma_i \quad (i=1, 2), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t); \\ U_i[x] = 0 \quad (i=1, 2), \end{cases}$$

分别为齐次边值问题、非齐次边值问题、第一类半齐次边值问题、第二类半齐次边值问题.

6.1.2 边值问题的某些性质

1. 齐次边值问题解的性质

1° 它必有平凡解 $x(t) \equiv 0$.

2° 若 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ 是它的 k 个解, 则它们的线性组合:

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_k x_k(t),$$

也是它的解.

3°若它有平凡解时,它的一切解或可由一个非零解 $x_i(t)$ 线性表出,或者由两个线性无关解 $x_1(t), x_2(t)$ 线性表出. 前者称为该齐次边值问题为一重可解,后者称二重可解.

2. 非齐次边值问题解的性质

1°若 $x_1(t), x_2(t)$ 是它的两个不同解,则 $x_1(t) - x_2(t)$ 是对应的齐次边值问题的非平凡解.

2°若 $x_0(t)$ 是它的某个解,则它的任何解可表为:

$$x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t),$$

其中, $\tilde{x}(t)$ 是它对应的齐次边值问题的解.

3. 半齐次边值问题解的性质

若 $\bar{x}(t)$ 是第一类半齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = 0; \\ U_i[x] = \gamma_i \quad (i=1,2), \end{cases}$$

的解; $\bar{\bar{x}}(t)$ 是第二类半齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t); \\ U_i[x] = 0 \quad (i=1,2), \end{cases}$$

的解,则:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \bar{\bar{x}}(t)$$

是非齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t); \\ U_i[x] = \gamma_i \quad (i=1,2), \end{cases}$$

的解.

6.1.3 边值问题的可解性条件

考虑矩阵:

$$U = \begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{pmatrix}$$

其中,元素 $U_i[x_j]$ 是解 $x_j(t)$ 在边界上 U_i 的值,它由式(6.1.3)所定义.

定理 6.1.1 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是齐次方程(6.1.2)的基本解组, $\tilde{x}(t)$ 是相应的非齐次方程(6.1.1)的一个解,则有:

1°若矩阵 U 的秩为 $l(l=0,1,2)$,则齐次边值问题是 $2-l$ 重可解的, $l=2$ (即 $|U| \neq 0$) 时,它只有平凡解;

2°非齐次边值条件问题可解的充分必要条件是:矩阵 U 和矩阵:

$$\begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & \gamma_1 - U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & \gamma_2 - U_2[\tilde{x}] \end{pmatrix}$$

有相同的秩;当秩等于2(即 $|U| \neq 0$)时,解是唯一的.

3°第一类和第二类半齐次边值问题可解的充分必要条件分别是:

矩阵 U 和矩阵

$$\begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2]\gamma_1 \\ U_2[x_1] & U_2[x_2]\gamma_2 \end{pmatrix}$$

的秩相同;

矩阵 U 和矩阵

$$\begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & U_2[\tilde{x}] \end{pmatrix}$$

的秩相同;当秩等于2(即 $|U| \neq 0$)时,解是唯一的.

例 6.1.1 讨论齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0; \\ x(0) = 0, x(\pi) = 0, \end{cases}$$

的可解性问题.

解:注意这里的边界条件对应:

$$U_1[x] = x(0), U_2[x] = x(\pi).$$

以下分 $\lambda = 0, \lambda < 0, \lambda > 0$ 三种情形进行讨论.

当 $\lambda = 0$ 时,方程为:

$$x'' = 0,$$

它有线性无关解:

$$x_1(t) = 1, x_2(t) = t$$

这时:

$$U = \begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(\pi) & x_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

所以有 $|U| = \pi \neq 0$,按定理中1°知,边值问题只有平凡解 $x(t) = 0$.

当 $\lambda < 0$ 时,记 $\lambda = -a^2$,方程写为:

$$x'' - a^2 x = 0.$$

它显然有线性无关解:

$$x_1(t) = e^{at}, x_2(t) = e^{-at}.$$

这时:

$$|U| = \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(\pi) & x_2(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{a\pi} & e^{-a\pi} \end{vmatrix} = e^{-a\pi} - e^{a\pi} \neq 0,$$

故这时边值问题也只有平凡解 $x(t) \equiv 0$.

当 $\lambda > 0$ 时,记 $\lambda = a^2$,方程写为:

$$x'' + a^2 x = 0$$

它有两个线性无关解:

$$x_1(t) = \cos at, x_2(t) = \sin at$$

这时:

$$|U| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos a\pi & \sin a\pi \end{vmatrix} = \sin a\pi$$

当 $a \neq \pm n$ (整数) 时, $|U| \neq 0$, 边值问题只有平凡解; 当 $a = \pm n$ 或 $\lambda = n^2, n = 1, 2, \dots$ 时, $|U| = 0$, U 的秩 $l = 1$, 这时这个边值问题一重可解. 事实上, 这时边值问题有非平凡解:

$$x = C \sin nt,$$

其中, $C \neq 0$ 为任意常数, 它代表满足 $x(0) = x(\pi) = 0$ 的一切解.

例 6.1.2 讨论非齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' = t; \\ x(0) - x(1) = 1; \\ x'(0) + x'(1) = 0. \end{cases}$$

的可解性.

解: 显然非齐次方程 $x'' = t$ 有特解 $\tilde{x} = \frac{1}{6}t^3$, 它对应的齐次方程 $x'' = 0$ 有基本解组 $x_1(t) = 1, x_2(t) = t$. 这里的边界条件对应:

$$U_1[x] \equiv x(0) - x(1), \quad U_2[x] \equiv x'(0) + x'(1).$$

因此, 矩阵:

$$U \equiv \begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] & \gamma_1 - U_1[\tilde{x}] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] & \gamma_2 - U_2[\tilde{x}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

它们的秩显然不等, 按定理中的 2° 知, 所给的非齐次边值问题无解. 这是边界条件给的不适当所致.

例 6.1.3 讨论:

$$\begin{cases} x'' = 0; \\ x(0) + x'(0) = x_1; \\ x'(0) = x'(1). \end{cases}$$

的可解性及求解.

解: 这时边界条件写成标准形式是:

$$U_1[x] \equiv x(0) - x(1) + x'(0) = 0$$

$$U_2[x] \equiv x'(0) - x'(1) = 0$$

因此所讨论的是齐次边值问题. 方程 $x'' = 0$ 本身有线性无关解 $x_1(t) = 1, x_2(t) = t$, 所以:

$$U \equiv \begin{pmatrix} U_1[x_1] & U_1[x_2] \\ U_2[x_1] & U_2[x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的秩 $l = 0$, 按定理中 1° 知, 所给边值问题为二重可解的, 事实上, 它有解

$$x = C_1 t + C_2.$$

6.2 边值问题的解法

边值问题的解法通常采用两种方法:待定常数法和借助格林函数的求解法. 当边值问题中的微分方程可求出通解时——齐次边值问题和第一类半齐次边值问题,采用待定常数法是方便的;对第二类半齐次边值问题和非齐次边值问题,当其中微分方程的通解不易求出时,常借助格林函数来求解.

6.2.1 待定常数法

求出边值问题中微分方程的通解,再利用边值条件确定其中的任意常数,从而得边值问题的解.

例 6.2.1 求边值问题:

$$\begin{cases} x'' + x = 1; \\ x(0) + x'(0) = 0; \\ x(\pi) = 0, \end{cases}$$

解:微分方程 $x'' + x = 1$ 的通解是:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1,$$

对上式求导有:

$$x'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

代入边值条件,分别得:

$$C_1 + 1 + C_2 = 0, \quad -C_1 + 1 = 0,$$

求得 $C_1 = 1, C_2 = -2$. 故边值问题的解是:

$$x = \cos t - 2\sin t + 1.$$

6.2.2 借助格林函数的求解法

借助格林函数求解的步骤如下:

1° 求出对应的齐次边值条件问题唯一的格林函数 $G(t, s)$;

2° 第二类半齐次边值问题(6.1.1)及问题(6.1.4)的解是:

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds;$$

3° 非齐次边值问题(6.1.1)及问题(6.1.3)的解等于对应的第一类半齐次边值条件的解(一般用待定系数法)加上对应的第二类半齐次边值问题的解.

定义 6.2.1 半齐次边值问题(6.1.2)及问题(6.1.4)的定义,在正方形 $D: a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的函数 $G(t, s)$,若满足下列条件,则称为此边值问题的格林函数:

1° $G(t, s)$ 对一切 $(t, s) \in D$ 有定义且连续;

2° $\frac{\partial G}{\partial t}$ 除 $t = s$ 外在 D 上连续,在 $t = s$ 处有跃度 1,即:

$$\frac{\partial G(s+0, s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-0, s)}{\partial t} = 1;$$

3° 对每个固定的 $s \in (a, b)$, $G(t, s)$ 在每个区间 $[a, s), (s, b]$ 上,作为 t 的函数,满足方程(6.1.2)及边界条件(6.1.4).

引理 6.2.1 若方程(6.1.2)的基本解组 $x_1(t), x_2(t)$ 对应的 $|U| \neq 0$, 则齐次边值问题(6.1.2)及边界条件(6.1.4)的格林函数可唯一确定.

具体求法如下.

1°令:

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s)x_1(t) + a_2(s)x_2(t) & (a \leq t \leq s); \\ b_1(s)x_1(t) + b_2(s)x_2(t) & (s \leq t \leq b). \end{cases} \quad (6.2.5)$$

由 $G(t, s)$ 在 $t = s$ 上的连续性, $\frac{\partial G}{\partial t}$ 在 $t = s$ 上跃度, 分别得:

$$\begin{aligned} & [b_1(s)x_1(s) + b_2(s)x_2(s)] - [a_1(s)x_1(s) + a_2(s)x_2(s)] \\ & = c_1(s)x_1(s) + c_2(s)x_2(s) = 0, \\ & [b_1(s)x'_1(s) + b_2(s)x'_2(s)] - [a_1(s)x'_1(s) + a_2(s)x'_2(s)] \\ & = c_1(s)x'_1(s) + c_2(s)x'_2(s) = 1, \end{aligned}$$

因此有:

$$\begin{cases} b_1(s) - a_1(s) = c_1(s) = -\frac{x_2(s)}{W(s)}; \\ b_2(s) - a_2(s) = c_2(s) = \frac{x_1(s)}{W(s)}, \end{cases} \quad (6.2.6)$$

这里 $W = W[x_1(s), x_2(s)] \neq 0$ 是朗斯基行列式.

2°由 $G(t, s)$ 应满足边界条件(6.1.4), 得:

$$U_i[G] = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (6.2.7)$$

这样由方程(6.2.6)和式(6.2.7)可唯一确定 $a_1(s), a_2(s), b_1(s), b_2(s)$, 并代入式(6.2.5)就可得到齐次边值问题的格林函数了.

例 6.2.2 试求齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' + k^2x = 0; \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

的格林函数.

解: 方程显然有基本解组 $\cos kt, \sin kt$. 做变换:

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s) \cos kt + a_2(s) \sin kt & (0 \leq t \leq s); \\ b_1(s) \cos kt + b_2(s) \sin kt & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

由引理中式(6.2.6), 知:

$$b_1(s) - a_1(s) \equiv c_1(s) = -\frac{\sin ks}{k},$$

$$b_2(s) - a_2(s) \equiv c_2(s) = \frac{\cos ks}{k},$$

再由边界条件, 得:

$$G(0, s) \equiv [a_1(s) \cos kt + a_2(s) \sin kt]_{t=0} \equiv a_1(s) = 0,$$

$$G(1, s) \equiv [b_1(s) \cos kt + b_2(s) \sin kt]_{t=1} \equiv b_1(s) \cos k + b_2(s) \sin k = 0,$$

从以上4式解得:

$$a_1(s) = 0, \quad a_2(s) = \frac{1}{k \sin k} \sin(s-1)k,$$

$$b_1(s) = -\frac{\sin ks}{k}, \quad b_2(s) = \frac{\cos k}{k \sin k} \sin ks.$$

代入 $G(t, s)$ 表达式, 得格林函数:

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{k \sin k} \sin k t \sin k(s-1) & (0 \leq t \leq s); \\ \frac{1}{k \sin k} \sin k s \sin k(t-1) & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

例 6.2.3 求解第二类半齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' - x = 1; \\ x(0) - x(1) = 0; \\ x'(0) - x'(1) = 0, \end{cases}$$

解: 求齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' - x = 0; \\ x(0) - x(1) = 0; \\ x'(0) - x'(1) = 0. \end{cases}$$

的格林函数.

上述方程显然有基本解组 e^t, e^{-t} , 其对应的朗斯基行列式:

$$W(t) \equiv W[e^t, e^{-t}] = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2.$$

做变换:

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s)e^t + a_2(s)e^{-t} & (0 \leq t \leq s); \\ b_1(s)e^t + b_2(s)e^{-t} & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

由引理式(6.2.6)知:

$$b_1(s) - a_1(s) = \frac{-e^{-s}}{W(s)} = \frac{1}{2}e^{-s},$$

$$b_2(s) - a_2(s) = \frac{e^s}{W(s)} = -\frac{1}{2}e^s,$$

再由 $G(t, s)$ 满足边界条件, 得:

$$G(0, s) - G(1, s) = a_1(s) + a_2(s) - b_1(s)e - b_2(s)e^{-1} = 0$$

$$G'(0, s) - G'(1, s) = a_1(s) - a_2(s) - b_1(s)e + b_2(s)e^{-1} = 0$$

从以上 4 个方程解出 $a_1(s), a_2(s), b_1(s), b_2(s)$, 代入 $G(t, s)$ 表达式, 得:

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-e)}(e^{t-s+1} + e^{s-t}) & (0 \leq t \leq s); \\ \frac{1}{2(1-e)}(e^{s-t+1} + e^{t-s}) & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

半齐次边值问题的解是(这里 $f(s) \equiv 1$):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(t, s) ds \\ &= \int_0^t \frac{(e^{s-t+1} + e^{t-s})}{2(1-e)} ds + \int_t^1 \frac{(e^{t-s+1} + e^{s-t})}{2(1-e)} ds \\ &= -1, \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

即 $x = -1$ 是所给第二类半齐次边值问题的唯一解.

例 6.2.4 求解非齐次边值问题:

$$\begin{cases} x'' = f(t); \\ x(0) = 1; \\ x'(1) = 2. \end{cases}$$

其中, $f(t)$ 为 $0 \leq t \leq 1$ 上的连续函数.

解: 先用待定系数法求第一类半齐次边值问题:

$$x'' = 0, x(0) = 1, x'(1) = 2$$

的解. 方程有基本解组 $1, t$, 通解为:

$$x = C_1 + C_2 t,$$

将上式代入边界条件, 得 $c_1 = 1, C_2 = 2$. 故上述第一类半齐次边值问题的解是:

$$x = 1 + 2t.$$

再求第二类半齐次边值问题:

$$x'' = f(t), x(0) = 0, x'(1) = 0$$

的解. 求 $x'' = 0, x(0) = x'(1) = 0$ 对应的格林函数. $x'' = 0$ 基本解组为 $1, t$:

$$W(t) = W[1, t] = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

做变换:

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s) + a_2(s)t & (0 \leq t \leq s); \\ b_1(s) + b_2(s)t & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

由引理中式(6.2.6), 知:

$$b_1(s) - a_1(s) = \frac{-s}{W(s)} = -s, \quad (6.2.9)$$

$$b_2(s) - a_2(s) = \frac{1}{W(s)} = 1,$$

再由 $G(t, s)$ 满足齐次边值条件, 得:

$$a_1(s) = 0, b_2(s) = 0.$$

以上4式决定了:

$$a_1(s) = 0, a_2(s) = -1, b_1(s) = -s, b_2(s) = 0,$$

代入 $G(t, s)$ 的形式, 得:

$$G(t, s) = \begin{cases} -t & (0 \leq t \leq s); \\ -s & (s \leq t \leq 1), \end{cases}$$

则所给的第二类半齐次边值问题解为:

$$x = - \int_0^t s f(s) ds - \int_t^1 t f(s) ds.$$

故原非齐次边值条件问题的解为:

$$x = 1 + 2t - \int_0^t s f(s) ds - \int_t^1 t f(s) ds.$$

第 7 章 差分方程

差分方程早期是作为有限差分学的一个部分出现的,并与有限差分学同时成长起来. 17 世纪到 18 世纪,伯努利(Bernoulli)、欧拉(Euler)、斯特林(Stirling)、牛顿(Newton)等分别在研究函数插补法和组合计数问题的同时建立了差分方程理论. 此后,随着对数值分析、离散数学及各种数学物理问题的深入研究,差分方程理论得到进一步发展.

离散与连续是客观世界物质运动独立统一的两种形式. 在现代数学中,差分方程理论主要是描述、处理离散变量的变化过程. 它与描述、处理连续变量的变化过程的微分方程理论之间显示出某种相似性,但也存在着差异. 从本质上来说,凡是变量的离散值存在某种递推关系的所有现象,都涉及差分方程.

本章的主要内容是介绍常差分方程理论的一些基本问题、求解差分方程的常用方法,以及差分方程稳定性理论的基本定理.

近年来,由于电子计算机的迅速发展,信息科学、工程控制、医学、生物数学、现代物理、社会经济等自然科学和边缘学科所研究处理的很多重要问题,都是由差分方程来描述的数学模型. 因此,差分方程已成为当今科技工作者必不可少的数学工具.

7.1 差分方程基本概念

7.1.1 差分的概念

定义 7.1.1 设 $y=f(x)$ 是一个函数,且 x 和 $x+\Delta x$ 在 $f(x)$ 的定义域内,则函数改变量:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

称为函数 $f(x)$ 在 x 的一阶差分,记为 $\Delta f(x)$.

在本章中,为简单起见,总假定 $\Delta x=1$,否则做自变量的代换 $x=t\Delta x$. 即可使新自变量的差分 $\Delta t=1$. 这样,上面函数 $f(x)$ 在 x 的一阶差分便可写成:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad (7.1.1)$$

显然, $\Delta f(x)$ 仍为 x 的一个函数,它的差分,即 $\Delta(\Delta f(x))$,称为函数 $f(x)$ 在 x 的二阶差分,记为 $\Delta^2 f(x)$. 因此有:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x). \quad (7.1.2)$$

类似地,可以定义函数 $f(x)$ 的 n 阶差分:

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \\ &= f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \binom{n}{2} f(x+n-2) + \\ &\quad \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} f(x+1) + (-1)^n f(x). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

其中, $\binom{n}{i}$ 表示从 n 个元素中取 i 个元素的组合数.

反过来, 由式(7.1.1)、式(7.1.2)、式(7.1.3), 函数 $f(x)$ 的相继值 $f(x+1), f(x+2), \dots, f(x+n)$ 可以用函数 $f(x)$ 及它的各阶差分来表示, 即:

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + \Delta f(x); \\ f(x+2) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x); \\ \vdots \\ f(x+n) = f(x) + \binom{n}{1}\Delta f(x) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(x) + \dots + \binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}f(x) + \Delta^n f(x). \end{cases} \quad (7.1.4)$$

7.1.2 差分的运算法则与差分公式

在上述差分的定义 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ 中, Δ 称为差分算子, 也就是说, 将 Δ 作用于函数 $f(x)$, 就得到 $f(x+1) - f(x)$.

1. 差分的运算法则

$$1^\circ \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$2^\circ \Delta[Cf(x)] = C\Delta f(x) \quad (C \text{ 为常数或以 } 1 \text{ 周期的函数});$$

由 $1^\circ, 2^\circ$ 知, 差分算子 Δ 是线性算子;

$$3^\circ \Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x);$$

$$4^\circ \Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)};$$

$$5^\circ \Delta^n[f(x)g(x)] = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \Delta^{n-i}f(x)\Delta^i g(x+n-i).$$

2. 差分公式

由差分的定义, 直接得到一些基本初等函数的差分公式:

$$1^\circ \text{ 若 } C \text{ 为常数或以 } 1 \text{ 周期的函数, 则 } \Delta C = 0;$$

$$2^\circ \Delta x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i}, \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$\Delta \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)},$$

$$\Delta \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}};$$

$$3^\circ \Delta a^x = a^x(a-1), \quad (a \text{ 为常数});$$

$$4^\circ \Delta \sin ax = 2 \sin \frac{a}{2} \cos a \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta \cos ax = -2 \sin \frac{a}{2} \sin a \left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta \tan ax = -\frac{\sin a}{\cos ax \cos a(1+x)};$$

$$5^{\circ} \Delta \sinh ax = 2 \sinh \frac{a}{2} \cosh a \left(x + \frac{1}{2} \right),$$

$$\Delta \cosh ax = 2 \sinh \frac{a}{2} \sinh a \left(x + \frac{1}{2} \right). \text{ 这里 } a \text{ 为常数};$$

$$6^{\circ} \Delta \ln x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$7^{\circ} \Delta \arctan x = \arctan \frac{1}{1+x+x^2};$$

$$8^{\circ} \Delta \binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}, (r \neq 1).$$

7.1.3 阶乘函数

由差分公式的 2° 看出,幂函数 x^n 的差分运算结果与微分运算结果大不相同,显然较复杂.本节引进一种函数,即阶乘函数,它在差分学中的地位与幂函数在微分学中的地位相似.

定义 7.1.2 n 个因子的连乘积(n 为正整数):

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \quad (7.1.5)$$

称为 x 的 n 次阶乘函数,记为 $x^{(n)}$.

特别地,当 $x=n$ 时,有 $n^{(n)}=n!$,即为通常的阶乘.

规定 $x^{(0)}=1$.

类似地,可以定义:

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} (n \text{ 为正整数}).$$

即:

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}.$$

容易证明, n 次阶乘函数 $x^{(n)}$ 有下述重要性质:

$$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}, \quad (7.1.6)$$

其中, n 为整数,这个公式类似微分学中幂函数的微分公式.

定义 7.1.3 如果 n 是正整数, $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, b_n$ 为常数,且 $b_0 \neq 0$,则:

$$b_0 x^{(n)} + b_1 x^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} x^{(1)} + b_n$$

称为 n 次阶乘多项式.

由阶乘函数的定义容易看出, n 次阶乘多项式也是通常的 n 次多项式的一种写法.同时,由式(7.1.6)知, n 次阶乘多项式在差分学中的地位与 n 次多项式在微分学中的地位相似.

例 7.1.1

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^{(2)} + 7x^{(1)} - 9 = 3x(x-1) + 7x - 9 \\ &= 3x^2 + 4x - 9. \end{aligned}$$

在差分学中,为方便起见,常常将已知多项式用阶乘多项式来表示.这时,可用下述定理(类似微分学中的麦克劳林(Maclaurin)展式).

定理 7.1.1 若 $g(x)$ 为 x 的 n 次多项式,则:

$$g(x) = g(0) + \frac{\Delta g(0)}{1!} x^{(1)} + \frac{\Delta^2 g(0)}{2!} x^{(2)} + \cdots + \frac{\Delta^n g(0)}{n!} x^{(n)}. \quad (7.1.7)$$

例 7.1.2 将 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ 表示成阶乘多项式.

解: 容易计算出如表 7.1 所示的数据, 因此:

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = -10 + 2x^{(1)} + 3x^{(2)} + 2x^{(3)}.$$

表 7.1

x	$P(0)$	$\Delta P(0)$	$\Delta^2 P(0)$	$\Delta^3 P(0)$	$\Delta^4 P(0)$
0	-10	2	6	12	0
1	-8	8	18	12	0
2	0	26	30	12	
3	26	56	42		
4	82	98			
5	180				

如果用待定系数法来把多项式表示成阶乘多项式, 则可以避免计算各阶差分, 这样往往比较简便.

在例 7.1.2 中, 设:

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = Ax^{(3)} + Bx^{(2)} + Cx^{(1)} + D.$$

即:

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = Ax(x-1)(x-2) + Bx(x-1) + Cx + D.$$

令 $x=0$, 得 $D = -10$, 代入上式并化简得:

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

令 $x=1$, 得 $C=2$, 代入上式并化简得:

$$2x - 1 = A(x-2) + B,$$

令 $x=2$, 得 $B=3$, 再代入上式并化简得:

$$2(x-2) = A(x-2),$$

所以 $A=2$, 因此:

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 2x^{(1)} - 10.$$

反过来, 若将一个阶乘多项式化为通常的多项式, 可如例 7.1.2 的做法, 直接代入阶乘函数定义的式(7.1.5), 将乘积因子展开、化简即得.

7.1.4 差分方程的概念

1. 差分方程的几种表示形式

定义 7.1.4 表示自变量 x , 未知函数 $f(x)$ 及它的各阶差分的关系式:

$$F(x, f(x), \Delta f(x), \cdots, \Delta^n f(x)) = 0 \quad (7.1.8)$$

称为差分方程, 其中 F 是已知的函数.

例如:

$$\Delta^3 f(x) + \Delta^2 f(x) - \Delta f(x) - f(x) = 0, \quad (7.1.9)$$

$$2f(x) + 3\Delta f(x) - \Delta^3 f(x) = x. \quad (7.1.10)$$

利用式(7.1.1)、式(7.1.2)、式(7.1.3), 可以把差分方程表示成未知函数 $f(x)$ 的相继值的形式:

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), \cdots, f(x+n)) = 0. \quad (7.1.11)$$

以下为简便起见, 也记 $y_x = f(x)$, $y_{x+1} = f(x+1)$, \cdots , $y_{x+n} = f(x+n)$. 于是, 式(7.1.11)又

可写成:

$$\Phi(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0. \quad (7.1.12)$$

式(7.1.11)或式(7.1.12)又称为递推关系式.

在差分方程的两种主要形式式(7.1.8)和式(7.1.11)中,由于以未知函数的相继值来表示式(7.1.12)或式(7.1.11)在解差分方程时较为方便,所以这种表示法最常用.

例如,差分方程(7.1.9)和方程(7.1.10)又分别可以写成:

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} = 0,$$

和

$$y_{x+3} - 3y_{x+2} = -x.$$

反过来,利用公式(7.1.4),形如式(7.1.11)或式(7.1.12)的差分方程也可以写成式(7.1.8)的形式.

2. 差分方程的阶、解、通解、特解

一个差分方程,如果把它化为以未知函数的相继值来表示的形式如式(7.1.12)后,未知函数 y 的下标的最大值与最小值之差 n 就称为这个差分方程的阶.

例如, $y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$ 是二阶差分方程,又如 $y_{x+3} - 3y_{x+2} = -x$ 是一阶差分方程.事实上,做自变量的代换,以 x 代替 $x+2$ 时,就得到 $y_{x+1} - 3y_x = 2 - x$. 这是差分方程与微分方程之间的显著区别之一,在微分方程中,自变量的变换不会改变方程的阶数.

定义 7.1.5 对于任意 x , 满足差分方程(7.1.8)或方程(7.1.12)的函数 $y_x = f(x)$, 称为差分方程(7.1.8)或方程(7.1.12)的解.

例如,可以直接验证,函数 $y_x = C_x 2^x$ (其中 C_x 是常数或是以 1 为周期的函数)是差分方程

$$y_{x+1} = 2y_x,$$

的解.

又如,函数 $y_x = A_x 3^x + B_x 4^x$ (其中 A_x, B_x 是常数或是以 1 为周期的函数)是差分方程

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 12y_x = 0,$$

的解.

定义 7.1.6 n 阶差分方程包含 n 个任意常数的解,称为这个差分方程的通解,若在差分方程的通解中,将常数取为固定值,所得的解称为这个差分方程的特解,它是由定解条件确定的.

例如,函数 $y_x = 2^x$ 是差分方程 $y_{x+1} = 2y_x$ 满足初始条件 $y_0 = 1$ 的特解,这时通解中的常数 $C = y_0 = 1$.

又如,函数 $y_x = -3^x + 4^x$ 是差分方程:

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} - 12y_x = 0,$$

满足初始条件 $y_0 = 0, y_1 = 1$ 的特解,这时 $A_x = -1, B_x = 1$.

7.1.5 函数的求和问题

定义 7.1.7 若函数 $F(x)$ 是差分方程:

$$\Delta F(x) = \varphi(x) \quad (7.1.13)$$

的解.显然,这时 $F(x) + C_x$ 也是方程的解,其中 C_x 为任意常数或以 1 为周期的函数.我们称 $F(x) + C_x$ 为函数 $\varphi(x)$ 的不定和,记为 $\Delta^{-1}\varphi(x)$, 即

$$\Delta^{-1}\varphi(x) = F(x) + C_x.$$

这里若把差分运算对应于导数运算,则求不定和就类似于微分学中求不定积分;而函数的求和问题就类似于求定积分的问题.

已知一个函数 $\varphi(x)$, 求它的不定和 $\Delta^{-1}\varphi(x)$, 可以把 7.1.2 节的差分运算法则与差分公式反转过来. 例如, 由差分运算法则的性质 1° 和 2° 分别得

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(f(x) + g(x)) &= \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x), \\ \Delta^{-1}(Cf(x)) &= C\Delta^{-1}f(x).\end{aligned}$$

而由性质 3° 得:

$$\Delta^{-1}(f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) - \Delta^{-1}(g(x+1)\Delta f(x)),$$

这就是分布求不定和公式.

又如, 由差分公式可得:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}a^x &= \frac{a^x}{a-1} + C_x, \quad (a \neq 1); \\ \Delta^{-1}x^{(n)} &= \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C_x, \quad (n \neq -1); \\ \Delta^{-1}\sin ax &= -\frac{\cos a\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2\sin \frac{a}{2}} + C_x, \quad (a \neq 2n\pi); \\ \Delta^{-1}\cos ax &= \frac{\sin a\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2\sin \frac{a}{2}} + C_x, \quad (a \neq 2n\pi); \\ \Delta^{-1}\binom{x}{r} &= \binom{x}{r+1} + C_x; \\ &\vdots\end{aligned}$$

设函数 $\varphi(x)$ 定义在数集 $\{a, a+1, a+2, \dots\}$ 上, a 是任意实数, k 为自然数. 称 $\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a+i)$ 为函数 $\varphi(x)$ 的有限和. 显然, 函数 $\varphi(x)$ 的有限和满足差分方程 (7.1.13), 即:

$$\Delta \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a+i) = \varphi(a+k).$$

所以:

$$\Delta^{-1}\varphi(a+k) = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(a+i) + C. \quad (7.1.14)$$

其中, C 为任意常数.

由此可得到如下定理.

定理 7.1.2 设函数 $\varphi(x)$ 定义在数集 $\{a, a+1, a+2, \dots\}$ 上, a 是任意实数, 若 $F(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的不定和, 则:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(a+i) = F(a+n) - F(a) = F(x) \Big|_a^{a+n}. \quad (7.1.15)$$

这就是函数求和基本公式, 它类似于求定积分的牛顿-莱布尼兹 (Newton Leibniz) 公式.

例 7.1.3 求和 $\sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i$, ($a \neq 1$).

解: 设 $\varphi(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, 则:

$$\Delta^{-1}\varphi(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^x + C_i.$$

由式(7.1.15), 得:

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i = -3\left(\frac{2}{3}\right)^i \Big|_0^{n+1} = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3.$$

例 7.1.4 求和 $\sum_{k=0}^n (2k^3 - 3k^2 + 3k - 10)$.

解: 由阶乘函数的定义, 得:

$$\sum_{k=0}^n (2k^3 - 3k^2 + 3k - 10) = \sum_{k=0}^n (-10 + 2k^{(1)} + 3k^{(2)} + 2k^{(3)}).$$

又

$$\begin{aligned} & \Delta^{-1}(-10 + 2k^{(1)} + 3k^{(2)} + 2k^{(3)}) \\ &= \Delta^{-1}(-10) + 2\Delta^{-1}k^{(1)} + 3\Delta^{-1}k^{(2)} + 2\Delta^{-1}k^{(3)} \\ &= -10k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + \frac{1}{2}k^{(4)} + C. \end{aligned}$$

所以, 由式(7.1.15)得:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (2k^3 - 3k^2 + 3k - 10) \\ &= (-10k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + \frac{1}{2}k^{(4)}) \Big|_0^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^2 - 9n - 10. \end{aligned}$$

对函数求和, 需要掌握一定的技巧和方法, 下面是分布求和法公式.

定理 7.1.3 1° 若 $m < n$, 则:

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k b_k = b_n \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{i=m}^k a_i \right) \Delta b_k. \quad (7.1.16)$$

2° 若 $p \geq n$, 则:

$$\sum_{k=n}^p a_k b_k = b_{n-1} \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p \left(\sum_{i=k}^p a_i \right) \Delta b_{k-1}. \quad (7.1.17)$$

式(7.1.16)就是著名的阿贝尔(Abel)求和公式.

例 7.1.5 求和 $\sum_{k=1}^{n-1} k2^k$.

解: 由式(7.1.16), 令 $a_k = 2^k$ 和 $b_k = k$.

得:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k = n \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^k 2^i \right).$$

由式(7.1.15)得:

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} k2^k &= n(2^n - 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2) \\
 &= n2^n - 2n - 2(2^n - 2) + 2(n-1) \\
 &= n2^n - 2^{n+1} + 2.
 \end{aligned}$$

值得指出的是,函数的求和就像求定积分一样,大多数的和不能表示成初等函数,例如

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

7.2 线性差分方程

若在差分方程(7.1.12)中的函数 Φ 关于 $y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}$ 是线性的,即它可以写成形式:

$$p_0(x)y_{x+n} + p_1(x)y_{x+n-1} + \dots + p_n(x)y_x = r(x). \quad (7.2.18)$$

则称其为 n 阶线性差分方程,其中 $r(x), p_i(x) (i=0, 1, \dots, n)$ 为给定的函数,称为系数,且 $p_0(x) \neq 0, p_n(x) \neq 0$.

若 $r(x) \equiv 0$,则称为 n 阶齐次线性差分方程;若 $r(x) \neq 0$,则称为 n 阶非齐次线性差分方程.

以下规定差分方程(7.2.18)中的自变量 x 取值于非负整数集 $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$,并记 x 为 k .

下面介绍线性差分方程解的结构。

求 n 阶线性差分方程(7.2.18)满足初值条件 $y(k_0) = a_0, y(k_1) = a_1, \dots, y(k_{n-1}) = a_{n-1}$ 的解 $y(k)$ 的问题,称为差分方程(7.2.18)的初值问题. 其中 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 为已知数,称为初值.

定理 7.2.1 (存在与唯一性定理) 如果 n 阶线性方程(7.2.18)的初始条件为给定未知函数 y 的相继 n 个值:

$$y(k_0) = a_0, y(k_0 + 1) = a_1, \dots, y(k_0 + n - 1) = a_{n-1},$$

则它的初值问题的解存在且唯一.

例 7.2.1 讨论二阶线性差分方程:

$$y_{k+2} - ky_{k+1} - y_k = 0 \quad (7.2.19)$$

满足下列初始条件的解的存在唯一性:

1° 已知 $y_0 = 0, y_2 = 1$;

2° 已知 $y_0 = y_2 = 1$.

解:

1° 当 $k=0$ 时,方程(7.2.19)变为 $y_2 - y_0 = 0$,于是 $y_2 = y_0 = 0$. 这与给定的 $y_2 = 1$ 矛盾. 故差分方程(7.2.19)满足初始条件 1° 的解不存在.

2° 当 $k=0$ 时,方程(7.2.19)变为 $y_2 - y_0 = 0$,即 $y_2 = y_0$,而 y_1 可以取任意值. 因此,差分方程(7.2.19)满足初始条件 $y_0 = y_2 = 1$ 的解存在,但不唯一.

这与定理 7.2.1 并不矛盾,因为定理 7.2.1 要求预先给定未知函数 y 的两个相继值.

显然,若函数 $f_1(k), f_2(k)$ 是线性差分方程(7.2.18)的两个解,则函数 $C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k)$ 也是这个差分方程的解,其中 C_1, C_2 为常数.

由此可知,线性差分方程(7.2.18)若有解,则必有无穷多个解.

定义 7.2.1 对于函数组 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(k)$, 若存在 n 个不全为零的常数 C_1, C_2, \dots, C_n , 使得:

$$C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \dots + C_n f_n(k) \equiv 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^+),$$

则称这 n 个函数是线性相关的; 否则称为线性无关的.

定义 7.2.2 对于函数组 $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$, 行列式:

$$\omega(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & \cdots & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(k+n+1) & f_2(k+n+1) & \cdots & f_n(k+n+1) \end{vmatrix},$$

称为这个函数组的卡索拉蒂(Casorati)行列式.

易知, 它满足:

$$\omega(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ \Delta f_1(k) & \Delta f_2(k) & \cdots & \Delta f_n(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^{n-1} f_1(k) & \Delta^{n-1} f_2(k) & \cdots & \Delta^{n-1} f_n(k) \end{vmatrix}.$$

卡索拉蒂行列式在差分方程中的作用与朗斯基(Wronsky)行列式在微分方程中的作用类似.

定理 7.2.2 若函数组 $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ 是差分方程(7.2.18)所对应的齐次差分方程:

$$p_0(k)y_{n+k} + p_1(k)y_{n+k-1} + \dots + p_n(k)y_n = 0 \quad (7.2.20)$$

的 n 个解, 则下述 3 个命题等价:

1° 这 n 个解线性无关.

2° 对所有 $k \in \mathbb{Z}^+$, 它们的卡索拉蒂行列式 $\omega(k) \neq 0$.

3° 对某一 $k_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\omega(k_0) \neq 0$.

定义 7.2.3 如果 $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ 是 n 阶齐次线性差分方程(7.2.20)的 n 个解, 且它们的卡索拉蒂行列式 $\omega(k) \neq 0$. 则这 n 个解称为这个 n 阶齐次线性差分方程的基本解组.

定理 7.2.3 如果 $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ 是 n 阶齐次线性差分方程(7.2.20)的基本解组, 则这个方程的通解为:

$$\varphi(k) = C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \dots + C_n f_n(k),$$

其中, C_1, C_2, \dots, C_n 是任意常数.

定理 7.2.4 n 阶非齐次线性差分方程(7.2.18)的通解 $f(k)$, 可以表示成它的一个特解 $f^*(k)$ 与对应的齐次线性方程(7.2.20)的通解之和. 也就是:

$$f(k) = C_1 f_1(k) + C_2 f_2(k) + \dots + C_n f_n(k) + f^*(k),$$

其中, $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ 为对应齐次方程(7.2.20)的基本解组, C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数.

齐次线性差分方程(7.2.20)的解与方程的系数有如下关系.

定理 7.2.5 若 $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ 是差分方程(7.2.20)的解, 并且它们的卡索拉蒂行列式为 $\omega(k)$, 则 $\omega(k)$ 满足方程:

$$w(k+1) = (-1)^n \frac{p_n(k)}{p_0(k)} \omega(k).$$

现在假设 $f_1(k)$ 是二阶方程:

$$p_0(k)f(k+2) + p_1(k)f(k+1) + p_2(k)f(k) = 0.$$

的一个非零解, 并且记 $f_2(k)$ 是另一个线性无关的解. 注意到:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{f_2(k)}{f_1(k)} &= \frac{f_1(k)\Delta f_2(k) - f_2(k)\Delta f_1(k)}{f_1(k)f_1(k+1)} \\ &= \frac{\omega(k)}{f_1(k)f_2(k+1)}.\end{aligned}$$

因此:

$$f_2(k) = f_1(k) \Delta^{-1} \frac{\omega(k)}{f_1(k)f_1(k+1)}.$$

由此可以得到二阶线性差分方程的一个降阶解法.

例 7.2.2 解差分方程:

$$y_{k+2} - y_{k+1} - \frac{1}{k+1}y_k = 0.$$

解: 由观察知 $f_1(x) = k+1$ 是方程的一个非零解. 设 $f_2(x)$ 是方程的另一个线性无关的解. 这时, 它们的卡索拉蒂行列式满足方程:

$$\omega(k+1) = -\frac{1}{k+1}\omega(k).$$

我们选择它的一个解:

$$\omega(k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

因此:

$$\begin{aligned}f_2(k) &= (k+1)\Delta^{-1} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)(k+2)} \\ &= (k+1) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(i+2)!}\end{aligned}$$

于是, 原方程的通解为:

$$y_k = C_1(k+1) + C_2(k+1) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{(i+2)!}.$$

其中, C_1, C_2 为任意常数.

第 8 章 偏微分方程

偏微分方程就是含有多元函数偏导数的方程式。对它的研究已有近 300 年的历史。早期,它产生于力学、几何、物理学等理论学科和工程技术问题中。近来,在生命科学、经济科学中也提出了大量的偏微分方程问题。所以,它作为数学科学最活跃的分支之一,一直受到广泛的关注和重视。但由于其复杂性和困难性,至今仍缺少全面的、一般的理论系统。在 20 世纪 30 年代之前,对偏微分方程的研究所采用的方法基本上属于经典分析,在此基础上建立了偏微分方程的经典理论。在 20 世纪 30—50 年代,由希尔伯特(Hilbert)创导,索伯列夫(Sobolev)、彼得罗夫斯基(Petrovsky)和施瓦兹(Schwartz)先后开始应用泛函分析方法研究偏微分方程,建立了索伯列夫空间和广义函数理论,由此又有了偏微分方程的近代理论。自 20 世纪 60 年代以来,对偏微分方程的研究进一步广泛地应用了泛函分析及其他数学分支(如几何、拓扑和代数)的新概念和方法,建立了拟微分算子、傅里叶(Fourier)积分算子和马斯罗夫(Maslov)算子理论,总称为微局部分析理论。自 20 世纪 80 年代起,这些现代方法又广泛应用于非线性偏微分方程的研究,于是有了非线性局部分析、几何测度论、黏性解和无穷维动力系统等一系列现代理论,从而大大促进了偏微分方程理论的蓬勃发展。本章主要介绍偏微分方程的基本概念和简单解法。

8.1 偏微分方程的基本概念

8.1.1 一般概念和记号

在自然科学和工程技术的各种运动及平衡现象等的研究中,常会遇到含多元未知函数及其偏导数(或仅含偏导数)的关系式,此关系式称为偏微分方程,若关系式不止一个,就称为偏微分方程组。例如:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y); \quad (8.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u; \quad (8.1.2)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0; \quad (8.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u; \quad (8.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u; \quad (8.1.5)$$

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0; \quad (8.1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (8.1.7)$$

$$F\left(x_1, x_1, \cdots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u\right) = 0 \quad (8.1.8)$$

人们所研究的偏微分方程及偏微分方程组,有的在物理及力学方面有重要应用,如式(8.1.3)、式(8.1.4)、式(8.1.5)及式(8.1.7);有的在几何学或其他数学分支中有特殊意义,如式(8.1.6);其他一些方程(组),其形式更为一般,在偏微分方程的理论研究及应用方面往往也是重要的.

偏微分方程(组)所包含的最高阶导数的阶称为该方程(组)的阶数,如式(8.1.1)、式(8.1.2)、式(8.1.7)是一阶的,而式(8.1.3)、式(8.1.6)是二阶的,式(8.1.8)是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 阶的.

若偏微分方程(组)关于未知函数及偏导数都是一次式,则这个偏微分方程(组)为线性的,否则称为非线性的.在非线性方程(组)中,若对未知函数的最高阶导数来说是线性的,则称为拟线性偏微分方程(组),否则称为完全非线性偏微分方程(组).如式(8.1.1)、式(8.1.3)、式(8.1.4)、式(8.1.5)是线性的,其余是非线性的,其中式(8.1.6)、式(8.1.7)是拟线性的,而式(8.1.8)常用来表示一般的完全非线性方程.

若线性偏微分方程(组)中有某项既不含未知函数又不含其偏导数,则称该方程(组)为非齐次的,否则称为齐次的.线性方程(组)最重要的性质是叠加原理成立,即若 u_1, u_2 是某齐次线性方程(组)的解,则对任意的常数 λ_1 和 λ_2 , $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ 也是该方程的解.这里称函数 u (在方程组的情形下是一组函数)为偏微分方程的解(或积分),若在指定的区域内 u 是连续的,且具有方程中出现的一切偏导数,并对区域内所有点都一致地满足方程.

若在空间 R^n 的某个区域 Ω 上讨论问题, R^n 的坐标为 x_1, x_2, \cdots, x_n , 则简记 (x_1, x_2, \cdots, x_n) 为 \mathbf{x} , 记 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 为 $\partial_i u$ 或 p_i , 记 (p_1, p_2, \cdots, p_n) 为 \mathbf{p} . 若引进重指标记号 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,

则记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, 记 $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u$ 为 $\partial^\alpha u$. 故式(8.1.8)可以简记为:

$$F(\mathbf{x}; u; \mathbf{p}, \cdots, \partial^\alpha u) = 0.$$

利用简化了的记号可将一般非线性偏微分方程组写成:

$$F_i(x; u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots, \partial^{a(i,j)} u_j, \cdots) = 0, (i=1, 2, \cdots, n). \quad (8.1.9)$$

这是包含 n 个方程的方程组,其中含有 m 个未知函数,各个方程中对 u_j 的最高阶导数 $a(i, j)$ 依赖于 i 和 j . 当 $n > m$ 时称式(8.1.9)为超定方程组,当 $n < m$ 时称式(8.1.9)为欠定方程组,当 $n = m$ 时则称为确定方程组.

8.1.2 偏微分方程与常微分方程的比较

对于一个 n 阶常微分方程,它的解的全体(除可能的一些“奇异解”外)依赖于 n 个任意常数.然而对偏微分方程而言,其求解的情形要复杂得多,如一个偏微分方程的解可能有很多,与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比,它的自由度往往会更大.

例 8.1.1

$$u_{xy} = f(x, y), \quad (8.1.10)$$

它的解可以写成:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta + \omega(x) + v(y), \quad (8.1.11)$$

其中, $\omega(x)$, $v(y)$ 为两个任意连续可微函数.

例 8.1.2

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = au. \quad (8.1.12)$$

方程(8.1.12)实际上是 a 阶齐次函数所满足的欧拉(Euler)关系式. 事实上对任一 a 阶齐次函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 满足:

$$u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^a u(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (8.1.13)$$

将它关于 t 求导并令 $t=1$ 即可得到 u 满足方程(8.1.12). 若在式(8.1.13)中取 $t = \frac{1}{x_n}$, 则:

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n^a u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right).$$

于是 u 可以用一个依赖于 $n-1$ 个变元的函数 $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ 写成如下形式:

$$u = x_n^a \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

这表明方程(8.1.12)的解可以自由到依赖于一个含 $n-1$ 个变元的函数.

在对偏微分方程的研究中, 一般感兴趣的是它的解, 如讨论其解的性质和结构及求解的方法等. 但求解偏微分方程往往是相当复杂的, 与常微分方程相比, 它的解一般来说很难用通解形式给出来, 即使对于线性方程也是如此. 所以对偏微分方程的求解往往更多地是研究其在一些特定条件下的解, 并称这些用来帮助决定特解的条件为**定解条件**.

在求解常微分方程的特解时所需的定解条件常常是在给定的区间(有限或无限)的两端(即边界点)对未知函数的值或其他性质加以某种限制. 而对偏微分方程进行求解时, 由于自变量在高维空间中变化, 其变化区域及区域的边界将会相当复杂, 因此在区域的边界给出定解条件也会有更多的形式, 一般称给定在区域的边界上的定解条件为**边界条件**. 在某些情况下, 出现在方程中的某个自变量可以赋予“时间”的意义, 例如前面提到的方程(8.1.4)和方程(8.1.5)中用 t 表示时间, 而 $t=t_0$ 超平面上给出的边界条件称为**初始条件**.

常微分方程同偏微分方程在解的存在性方面也有相当大的差别. 对于常微分方程, 有解的存在性定理, 即在相当一般(如要求连续性等)的条件下可以证明其解是局部存在的. 而相对于偏微分方程, 虽然对许多常见的偏微分方程在不考虑定解条件时解有很大的自由度, 但也有许多条件非常好的偏微分方程, 其解哪怕是在非常小的局部范围内也是不存在的. 这方面第一个无解方程的例子是 Hans Lewy 于 1957 年给定的(这个例子曾被称为 20 世纪 50 年代偏微分方程的三大里程碑之一, 它的产生使人们认识到偏微分方程的研究同常微分方程相比有本质性的不同), 他所构造的方程是一个多项式系数条件非常好的一阶线性偏微分方程, 即:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, t), \quad (8.1.14)$$

其中, f 为某个在 R^3 原点附近无穷次可微的光滑函数. Lewy 证明了方程(8.1.14)在原点的邻域内不存在解 u .

因此,人们对偏微分方程的研究方法与常微分方程相比有很大的不同,从而形成了两个独立的数学分支.然而尽管有这些差别,常微分方程中的理论和方法对偏微分方程的研究也是相当重要的.

8.2 一阶偏微分方程

8.2.1 完全积分、一般积分和奇异积分

一阶偏微分方程的一般形式为:

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (8.2.15)$$

若方程(8.2.15)的解包含 n 个函数,则这种解称为**一般积分**(通解);如果包含 n 个独立的常数,则称这样的解为**完全积分**(完全解);若 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n; u; C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$ 为一阶方程(8.2.15)的完全积分,从 $G = 0, \frac{\partial G}{\partial G_i} = 0 (1 \leq i \leq n)$ 中消去 G_i , 若可得到一个解,则称为方程的**奇异解**(奇异积分).可以证明,一阶偏微分方程(8.2.15)的任何解均包含在一般积分内,或者完全积分内,或者奇异积分内.

对一阶偏微分方程(8.2.15),假定 F 对所有变量均有连续的一阶偏导数,则称:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u}\right), \\ p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (8.2.16)$$

为非线性方程(8.2.15)的特征方程组.此特征方程组还可以写成如下等价的形式:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{du}{\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial u}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial u}} \quad (8.2.17)$$

设特征方程组的解为:

$$\begin{cases} x_i = x_i(t), \\ u = u(t), \\ p_i = p_i(t), \end{cases} \quad \begin{matrix} (8.2.18) \\ (8.2.19) \\ (8.2.20) \end{matrix} \quad 1 \leq i \leq n,$$

并称它为非线性偏微分方程(8.2.15)的**特征带**.在 x_1, x_2, \cdots, x_n, u 空间的曲线即上面方程组中第一个和第二个方程称为非线性偏微分方程(8.2.15)的**特征曲线**.如果函数 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n; u; p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 在特征方程组的任一解 $x_i = x_i(t), u = u(t), p_i = p_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 上等于常数,即:

$$Z(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t); u(t); p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)) = C.$$

则函数 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n; u; p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 称为特征方程组的**首次积分**.

例 8.2.1 解一阶齐次线性偏微分方程:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (8.2.21)$$

解: 方程(8.2.21)对应的特征方程组为:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \\ \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{x_3}{x_1}, \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{x_n}{x_1}, \end{cases} \quad (8.2.22)$$

或写成对称的形式:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

由上式可以求出式(8.2.22)的 $n-1$ 个互相独立的首次积分:

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \frac{x_3}{x_1} = C_2, \cdots, \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1},$$

并且这些首次积分均为方程(8.2.21)的解. 由常微分方程知识可知, 方程(8.2.21)的全部的解可以写成:

$$u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right) \quad (8.2.23)$$

这里 Φ 是其变元的任意可微函数.

由表达式(8.2.23)可知, 方程(8.2.21)的任意解均是零次齐次函数, 实际上方程(8.2.21)正是零次齐次函数所满足的欧拉方程.

例 8.2.2 考虑方程 $\frac{\partial u}{\partial y} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $(x, y) \in R^2$.

解: 方程的完全积分为:

$$u = ax + f(a)y + b \quad (a, b \text{ 为任意常数}).$$

这个方程代表一个平面, 其一般积分(通解)可由方程组:

$$u = ax + f(a)y + \varphi(a), \quad 0 = x + f'(a)y + \varphi'(a)$$

给出. 这是一个可展曲面, 其几何意义为: 从通过空间一固定点(如原点)做出平行于形成完全积分的平面, 这些平面仅依赖于参数 a , 因此包络成一个顶点在原点的锥面. 由此可见, 这个曲面的母线平行于刚才所述的锥面的母线.

若在其完全积分两端对 b 求导, 会得到 $0=1$ 的矛盾方程, 这表明此例中没有奇异积分.

8.2.2 几类特殊的一阶偏微分方程

(1) 不显含变量 x, y, z , 而只出现 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的情形.

这种方程的形式为:

$$f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

其完全积分为 $z = ax + ky + b$, 其中 a, k, b 均为常量, 且 $f(a, k) = 0$.

例 8.2.3 解一阶非线性偏微分方程:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

解: 由已给的偏微分方程可知 $ak = 1$, $k = \frac{1}{a}$, 故此偏微分方程的完全积分为:

$$z = ax + \frac{y}{a} + b.$$

(2) 只显含一个变量的情形.

1° $F\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ (或 $F\left(y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$) 型.

对于 $F\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, 可设 $\frac{\partial z}{\partial y} = a$ (a 为常量), 然后从 $F\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}, a\right) = 0$ 中解出 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 即 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, a)$. 再把这些 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 的值代入:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

得

$$dz = \varphi(x, a) dx + a dy,$$

积分后可得完全积分:

$$z = \int \varphi(x, a) dx + ay + b$$

用同样方法可求解 $F\left(y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 型的方程.

例 8.2.4 求解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 设 $\frac{\partial z}{\partial y} = a$, 从给定的方程中解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax$, 故

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2ax dx + a dy$$

积分后得完全积分为:

$$z = ax^2 + ay + b.$$

例 8.2.5 求解 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$.

解: 设 $\frac{\partial z}{\partial x} = a$, 从给定的方程中解得 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2a^2 y$, 则:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = a dx + 2a^2 y dy,$$

积分后得完全积分为:

$$z = ax + a^2 y^2 + b.$$

2° $F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ 型.

此时可设 $\frac{\partial z}{\partial y} = a$, 代入方程 $F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ 中, 解出 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z, a)$, 再由这些值得:

$$dz = \varphi(z, a)(dx + a dy),$$

积分后得完全积分为:

$$x + ay = \int \frac{dz}{\varphi(z, a)} + b.$$

例 8.2.6 求解 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4$.

解: 设 $\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$, 从给定的方程中解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\pm 2}{3\sqrt{z+a^2}}$,

故而

$$dz = \frac{\pm 2}{3\sqrt{z+a^2}}(dx + a dy).$$

两边积分后可得完全积分为:

$$x + ay = \pm (z + a^2)^{3/2} + b,$$

或

$$(x + ay - b)^2 = (z + a^2)^3.$$

(3) 形如 $f\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = h\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 的特殊方程.

这时可设方程两边均等于一个任意常数 a , 再解出新方程中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 即:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, a), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(y, a).$$

由此可得到 $dz = \varphi(x, a)dx + \psi(y, a)dy$, 积分后可得完全积分为:

$$z = \int \varphi(x, a)dx + \int \psi(y, a)dy + b.$$

例 8.2.7 求解 $\frac{\partial z}{\partial x}y + \frac{\partial z}{\partial y}x = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 原方程可变形为 $\frac{\frac{\partial z}{\partial x} - x}{x} = \frac{y}{\frac{\partial z}{\partial y} - y}$,

令两边都等于 a , 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x(a+1), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(a+1)}{a}y.$$

从而 $dz = (a+1)(xdx + \frac{y}{a}dy)$. 两边积分后可得完全积分为:

$$z = (a+1)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2a}\right) + b.$$

(4) 克莱洛方程:

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

其完全积分为:

$$z = ax + by + f(a, b).$$

(5) 形如 $\varphi\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \psi\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z$ 的特殊方程.

这时可用分离变量法求它的完全积分. 令:

$$z = f(x) + g(y).$$

代入原方程可得:

$$\varphi(x, f'(x)) - f(x) = \psi(y, g'(y)) + g(y).$$

这就把变量 x 和 y 分离了. 上式左边仅是 x 的函数, 而右边只依赖于 y , 因而得到:

$$\varphi(x, f'(x)) - f(x) = \psi(y, g'(y)) + g(y) = C,$$

其中, C 为常数. 从常微分方程:

$$\begin{cases} \varphi(x, f'(x)) - f(x) = C, \\ \psi(y, g'(y)) + g(y) = C. \end{cases}$$

分别解出 $f(x)$ 和 $g(y)$, 再由 $z = f(x) + g(y)$ 可以得到原方程的完全积分.

例 8.2.8 求解 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = mz$.

解: 设 $z = f(x) + g(y)$, 代入原方程可得到:

$$xf'(x) - mf(x) = -yg'(y) + mg(y).$$

故解 $xf'(x) - mf(x) = C$ 和 $-yg'(y) + mg(y) = C$, 可得:

$$f(x) = ax^m - \frac{C}{m}, \quad g(y) = by^m + \frac{C}{m}.$$

所得 $z = ax^m + by^m$ 为原方程的完全积分.

8.2.3 一阶拟线性偏微分方程

含有两个自变量的一阶拟线性偏微分方程是:

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z). \quad (8.2.24)$$

设函数 $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ 和 $c(x, y, z)$ 在三维空间的某个区域 G 内有连续的一阶偏导数, 且 a 和 b 在 G 内部不同时为零.

方程(8.2.24)的几何意义: 以区域 G 中的每一点 (x, y, z) 为始点, 以 (a, b, c) 为方向数引一向量. 这样就在区域 G 中的每一点确定了一个方向, 因而得到了一个方向场, 称为偏微分方程(8.2.24)所确定的方向场. 设光滑曲面 $z = \varphi(x, y)$ 是方程(8.2.24)的积分曲面, 那

么它在 $(x, y, \varphi(x, y))$ 处的法线方向数为 $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, -1 , 适合等式:

$$ap + bq + c(-1) = 0,$$

也就是说向量 (a, b, c) 和 $(p, q, -1)$ 是互相垂直的. 所以积分曲面 $z = \varphi(x, y)$ 上任意一点的法线与方程(8.2.24)的方向场在这一点的方向是互相垂直的.

另一方面, 一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \end{cases} \quad (8.2.25)$$

在 (x, y, z) 空间中确定的方向场与偏微分方程 (8.2.24) 确定的方向场一致, 称常微分方程组 (8.2.25) 为偏微分方程 (8.2.24) 的 **特征方程**. 而常微分方程组 (8.2.25) 的每一个解 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 在三维空间 (x, y, z) 中表示一条曲线, 这条曲线称为一阶偏微分方程 (8.2.24) 的 **特征曲线**.

一阶偏微分方程 (8.2.24) 的求解问题和常微分方程组 (8.2.25) 的求解问题在下面的意义下是等价的.

1° 特征曲线族所织成的光滑曲面是偏微分方程 (8.2.24) 的积分曲面.

2° 偏微分方程 (8.2.24) 的每个积分曲面 $z = \varphi(x, y)$ 都可以由特征曲线族组成, 即过曲面 $z = \varphi(x, y)$ 的每一点所引的特征曲线整个落在曲面 $z = \varphi(x, y)$ 上.

由此可得求解一阶拟线性偏微分方程的方法: 首先做出它的特征方程 (8.2.25), 并求出它的全部解, 然后从其中选取一族特征曲线, 使它织成光滑曲面, 这样就得到方程 (8.2.24) 的一个积分曲面.

柯西问题: 若在方程 (8.2.24) 的定义域 G 中预先给定了一条曲线:

$$L: x = x_0(t), y = y_0(t), z = z_0(t) \quad (8.2.26)$$

要求解方程 (8.2.24) 的这样一个积分曲面 $z = \varphi(x, y)$, 使它含有曲线 L , 即:

$$z_0(t) = \varphi(x_0(t), y_0(t)),$$

这个问题称为一阶拟线性偏微分方程的柯西问题, 它是常微分方程的初始值问题在偏微分方程中的自然拓展. 这里需要假定 $x'_0(t)$, $y'_0(t)$, $z'_0(t)$ 是连续的, 并且 $x'^2_0(t) + y'^2_0(t) \neq 0$.

和常微分方程的初始值问题解的存在性不一样, 偏微分方程的柯西问题有 3 种可能性:

1° 如果 $x'_0(t): y'_0(t) \neq a(x_0(t), y_0(t), z_0(t)): b(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$, 则上述柯西问题有唯一解;

2° 如果曲线 L 是特征线, 即:

$$\frac{x'_0(t)}{a(x_0(t), y_0(t), z_0(t))} = \frac{y'_0(t)}{b(x_0(t), y_0(t), z_0(t))} = \frac{z'_0(t)}{c(x_0(t), y_0(t), z_0(t))},$$

则上述柯西问题的解不是唯一的 (有无穷多个解);

3° 若 L 不是特征线, 但是:

$$x'_0(t): y'_0(t) = a(x_0(t), y_0(t), z_0(t)): b(x_0(t), y_0(t), z_0(t)),$$

则上述柯西问题没有解.

例 8.2.9 求解方程:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (8.2.27)$$

过曲线 $L: x=0, z=y^2$ 的积分曲面.

解: 这时 $a = -y$, $b = x$, $c = 0$. 方程 (8.2.27) 的特征方程为:

$$\frac{dx}{ds} = -y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{dz}{ds} = 0.$$

它的一般解为

$$x(s) = C_1 \cos s + C_2 \sin s, \quad y(s) = C_1 \sin s - C_2 \cos s, \quad z(s) = C_3$$

曲线 L 的参数方程为 $x=0, y=t, z=t^2$, 因为:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x'_0 & y'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -t \neq 0,$$

所以方程有唯一的积分曲面含有曲线 L .

根据初始条件: $x(0) = C_1 = 0$, $y(0) = -C_2 = t$, $z(0) = C_3 = t^2$, 从而得到:

$$x = -t \sin s, \quad y = t \cos s, \quad z = t^2,$$

由前两式中消去 s , 得到 $x^2 + y^2 = t^2$, 代入第三式得到所要求的过曲线 L 的积分曲面:

$$z = x^2 + y^2.$$

例 8.2.10 求方程(8.2.27)过曲线 $L: z = 1, x^2 + y^2 = 4$ 的积分曲面.

解: 这时 L 的参数方程为:

$$x = 2 \cos t, \quad y = \pm 2 \sin t, \quad z = 1,$$

它的切线方向是 $(-2 \sin t, \pm 2 \cos t, 0)$ 这和方程(8.2.27)的方向场的方向 $(\pm 2 \sin t, 2 \cos t, 0)$ 是一致的, 所以 L 是特征曲线, 故方程(8.2.27)有无穷多个积分曲面含有曲线 L , 例如:

$$z = x^2 + y^2 - 3, \quad 4z = x^2 + y^2, \quad z = -x^2 - y^2 + 5$$

等都是所述柯西问题的解.

例 8.2.11 求解方程(8.2.27)过曲线 $L: z = x, x^2 + y^2 = 1$ 的积分曲面.

解: 曲线 L 的参数方程是:

$$x = \cos t, \quad y = \pm \sin t, \quad z = \cos t,$$

由于沿 L 成立着恒等式:

$$x'_0(t): y'_0(t) = (-\sin t): (\pm \cos t) = (-y): x = a: b,$$

但这时 L 不是特征线, 因而所提的柯西问题无解.

一般形式的一阶拟线性偏微分方程为:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \quad (8.2.28)$$

其中, a_i 和 f 均为 x_1, x_2, \dots, x_n, u 的连续函数, 并且不同时为零. 常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \\ \frac{du}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n), \quad (8.2.29)$$

或者

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{f}, \\ a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n), \quad (8.2.30)$$

称为拟线性方程(8.2.28)的特征方程组, 若曲线:

$$L: \begin{cases} x_i = x_i(t), \quad (1 \leq i \leq n), \\ u = u(t), \end{cases}$$

满足特征方程组(8.2.29)和方程组(8.2.30), 则称 L 为拟线性方程的特征曲线.

设

$$y_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \quad (1 \leq i \leq n)$$

为特征方程组(8.2.30)的 n 个独立的首次积分, 则它对于任何连续可微函数:

$$\Phi = \Phi(y_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u)) = 0$$

都是拟线性方程(8.2.28)的隐式解.

8.2.4 一阶偏微分方程组

1. 相容方程组

设给定了两个一阶偏微分方程的方程组:

$$\begin{cases} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \\ G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \quad (8.2.31)$$

其中, x, y 是自变量, z 是未知函数. 一般说来, 不一定存在函数 $z = \varphi(x, y)$ 同时满足这两个方程, 也就是说它们可能没有公共的积分曲面.

下面讨论方程组(8.2.31)有公共解的条件.

当 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0$ 时(这里 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), 利用隐函数存在定理可由式(8.2.31)解出 p 和 q :

$$\begin{cases} p = A(x, y, z) \\ q = B(x, y, z), \end{cases} \quad (8.2.32)$$

假定函数 A 和 B 在 (x, y, z) 的某个区域 G 中有连续的一阶偏导数, 如果过区域 G 的每一点 (x, y, z) , 方程组(8.2.32)都有一公共的积分曲面, 则称方程组(8.2.32)是相容的.

若 $z = \varphi(x, y)$ 是方程组(8.2.32)的一个公共解, 则可推出在积分曲面 $z = \varphi(x, y)$ 上成立:

$$A_y + A_z B = B_x + B_z A. \quad (8.2.33)$$

因此当方程组(8.2.32)相容时, 式(8.2.33)在 G 中恒成立.

反之, 若式(8.2.33)在 G 中恒成立, 也可推出方程组(8.2.32)是相容的. 所以在解相容方程组(8.2.32)时, 先验证条件(8.2.33)是否成立, 然后把 y 看做参数, 解常微分方程:

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z), \quad (8.2.34)$$

得到 $z = \varphi(x, y, c(y))$, 其中 c 是 y 的任意连续函数, 将此代入方程组(8.2.32)的第二个方程, 得到一个关于 $c(y)$ 的常微分方程, 解出 $c(y)$ 再代入式(8.2.34)即得方程组(8.2.32)的公共解.

2. 法甫方程

形状如下的一阶偏微分方程:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (8.2.35)$$

称为法甫(Pfaff)方程. 这里设 P, Q, R 在区域 G 中有连续的偏导数, 且 $P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0$. 现不妨假定 $R \neq 0$, 若函数 $z = \varphi(x, y)$ 适合恒等式: $P(x, y, \varphi(x, y))dx + Q(x, y, \varphi(x, y))dy + R(x, y, \varphi(x, y))\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy\right) = 0$

即:

$$\begin{cases} R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ R(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Q(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \end{cases}$$

这表明 $z = \varphi(x, y)$ 是方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R} \end{cases} \quad (8.2.36)$$

的公共解, 也就是方程(8.2.35)的解. 因此当 $R \neq 0$ 时, 求方程(8.2.35)的解相当于求解方程组(8.2.36).

方程(8.2.35)过区域 G 的每一点有一积分曲面的充要条件是:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \quad (8.2.37)$$

式(8.2.37)关于 x, y, z 是对称的. 同样当 $P \neq 0$, 方程(8.2.35)有形如 $x = \varphi(y, z)$ 的积分曲面时, 也可得到关系式(8.2.37).

如果方程(8.2.35)的左边是函数 $u(x, y, z)$ 的全微分, 即:

$$du(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz,$$

则 $u(x, y, z) = C$ 是方程(8.2.35)的积分曲面族.

法甫方程在微分几何中应用很广, 并可推广到多维的情形.

3. 求完全积分的拉格朗日 - 沙比方法

这里给出求解两个自变量的一阶偏微分方程的一般方法. 为了求方程:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (8.2.38)$$

的完全积分, 先设法补充一个方程:

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = a, \quad (8.2.39)$$

使它与方程(8.2.38)有含有一个参数的公共积分曲面族:

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad (8.2.40)$$

那么式(8.2.40)是方程(8.2.38)的积分曲面族. 可以证明, 若 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0$ (这里 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), 则式(8.2.40)确是方程(8.2.38)的含有两个独立参数的解族, 从而是方程(8.2.38)的完全积分. 以上方法称为求方程(8.2.38)的完全积分的拉格朗日 - 沙比(Lagrange-charpit)方法.

具体地说, 函数 G 应适合什么条件, 方程(8.2.38)与方程(8.2.39)才有含一个参数的公共解族? 这个问题相当于方程(8.2.38)与方程(8.2.39)是相容的问题. 这时相容性条件应该是什么呢? 由以上的条件可从方程(8.2.38)和方程(8.2.39)中解出 p 和 q :

$$p = A(x, y, z, a), \quad q = B(x, y, z, a),$$

再把解得结果代入方程(8.2.38)和方程(8.2.39), 就得到:

$$F(x, y, z, A(x, y, z, a), B(x, y, z, a)) = 0, \quad (8.2.41)$$

$$G(x, y, z, A(x, y, z, a), B(x, y, z, a)) = a, \quad (8.2.42)$$

所以:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial z} = 0.$$

故可解出 A_z 和 B_z . 同理将式(8.2.41)、式(8.2.42)分别对 x 和 y 求导也可解出 A_y 和 B_x . 然后代入相容性条件式(8.2.33), 由 $A_y + A_z B = B_x + B_z A$ 得到:

$$-\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix} B + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix} A = 0,$$

当 $p = A, q = B$ 时关于 x, y, z 恒成立. 所以方程(8.2.38)和方程(8.2.39)相容的条件为:

$$-\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix} p = 0,$$

且关于 x, y, z, p, q 恒成立. 上式整理之后得到:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial y} + \left(p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial G}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial G}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial G}{\partial q} = 0. \quad (8.2.43)$$

这是一个关于 5 个变量 x, y, z, p, q 的未知函数 G 的线性齐次偏微分方程. 其对应的特征方程组为:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)}. \quad (8.2.44)$$

明显地, 函数 $F(x, y, z, p, q)$ 是方程组(8.2.44)的一个首次积分. 此外需要求方程组(8.2.44)

的另一个与 F 无关的首次积分 $G(x, y, z, p, q)$. 即要求它适合条件 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0$.

例 8.2.12 求方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$ 的完全积分.

解: 这时的特征方程为:

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = 2q, \quad \frac{dz}{ds} = 2(p^2 + q^2) = 2, \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0$$

所以 $p = a$ 是它的一个首次积分, 并且与 $p^2 + q^2 - 1$ 无关. 由:

$$\begin{cases} p = a, \\ p^2 + q^2 = 1, \end{cases}$$

解出 p 和 q . 得到 $p = a, q = \pm \sqrt{1 - a^2}$, 因此:

$$z = ax \pm \sqrt{1 - a^2} y + b$$

是方程的完全积分.

例 8.2.13 求解偏微分方程 $2xz - x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

解: 这时 $F = 2xz - x^2 p - 2xyq + pq$, 对应的特征方程为:

$$\frac{dp}{2z - 2xy} = \frac{dq}{0} = \frac{dx}{x^2 - q} = \frac{dy}{2xy - p} = \frac{dz}{px^2 + 2xyq - 2pq},$$

显然 $q = a$ 是与 F 无关的一个首次积分, 故联立:

$$\begin{cases} q = a, \\ F = 0, \end{cases}$$

可解出:

$$p = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a},$$

因此由:

$$dz = p dx + q dy = \frac{2x(z - ay)}{x^2 - a} dx + a dy,$$

即:

$$\frac{dz - a dy}{z - ay} = \frac{2x dx}{x^2 - a},$$

两边积分可解出:

$$z = ay + b(x^2 - a)$$

是原方程的完全积分.

例 8.2.14 求解:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z + xy = 0.$$

解: 它的特征方程是:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2p + q - y} &= \frac{dy}{2q + p - x} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2 + pq) - py - qx} \\ &= \frac{dp}{q - y + 2p} = \frac{dq}{p - x + 2q}, \end{aligned}$$

因此:

$$dx - dp = 0,$$

从而得到一个与 F 无关的首次积分:

$$p - x = a.$$

由

$$\begin{cases} p - x = a, \\ p^2 + q^2 + pq - qx - py - 2z + xy = 0, \end{cases}$$

可解出 p 和 q :

$$\begin{aligned} p &= a + x, \\ q &= -\frac{a}{2} + \sqrt{2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}}, \end{aligned}$$

故

$$dz = p dx + q dy = (x + a) dx + \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}}\right) dy,$$

这实际上是一个法甫方程, 即:

$$dy = \frac{dz + \frac{a}{2} dy - (x + a) dx}{\sqrt{2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{d\left(2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}\right)}{2\sqrt{2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}}},$$

两边积分有:

$$y + b = \sqrt{2z + ay - (x + a)^2 + \frac{a^2}{4}},$$

因此:

$$z = \frac{1}{2} [(x + a)^2 + (y + b)^2 - ay - \frac{a^2}{4}],$$

为原方程的完全积分.

一般而言, 对多于两个自变量的一阶线性偏微分方程:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a_1(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \quad (8.2.45)$$

若 $z = \varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ 为方程组(8.2.45)的非常值解, 则 $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ 是常微分方程:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n), \quad (8.2.46)$$

的首次积分. 以上结论反过来也成立. 故只要能找到对应于方程组(8.2.45)的特征方程组(8.2.46)的首次积分, 也就等于找到了方程组(8.2.45)的解.

第 9 章 泛函微分方程

9.1 问题的提出

9.1.1 历史背景

1750 年 Euler 提出了一个古典的几何学问题: 是否存在一种曲线, 它经过平移、旋转运动以后能与其渐缩线重合? 1771 年, Condorcet 讨论这个问题, 导出了已知的、历史上第一个泛函微分方程(参见例 9.1.15). 此后一个世纪中, 许多著名的数学家, 如 Bernoulli、Laplace、Poisson 及 Babbage 等都提出过类似的方程. 鉴于这些类型方程的复杂性, 一直未能对它们进行有效的研究, 而作为数学的一种历史悬案搁置下来了. 20 世纪 70 年代以来, 在生物学、物理学、控制理论和工程问题中出现了类似的、甚至更为复杂的这类方程, 促使人们对这种困难的课题开始认真地分析, 但收效甚微. 20 世纪 80 年代以后才有一些有趣的初步成果.

21 世纪以来, 自然科学与社会科学的许多学科中提出了大量时滞动力学系统问题, 如核物理学、电路信号系统、生态系统、化工循环系统、遗传问题、流行病学、动物与植物的循环系统. 社会科学方面主要是各种经济现象时滞的描述, 如商业销售问题、财富分布理论、资本主义经济周期性危机、运输调度问题、工业生产管理等. 各种工程系统中的时滞现象更加普遍, 特别是自动控制系统. 时滞动力学系统的数量庞大, 形式较为规整, 自变量 t 通常表示时间. 这类方程比起上述的复杂 FDE 更接近于经典微分方程的种种性质, 其系统理论构成了迄今泛函微分方程理论的主体, 自然也是本章的主要部分.

严格地说, 在动力学系统中时滞通常是不可避免的, 即使以光速传递的信息系统也不例外. 在这个意义下, 常微分方程组:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad x \in R^n, \quad (9.1.1)$$

只是动力学系统的一种近似描述, 对于不同的应用领域, 通常从以下三个不同的角度去处理系统中的时滞.

(1) 寻求略去滞量不改变动力系统解的指定性态的条件. 换言之, 在这些条件下用常微分方程去描述动力学系统已够精确, 而不必顾及系统中的时滞因素.

(2) 对于略去滞量便达不到必要的精确度甚至导致错误的系统, 以及若不考虑滞量便无法建立数学模型的系统, 则需要建立一系列新的概念和方法去直接研究它们解的种种性态.

(3) 为了使系统具有期望的性态, 设法控制滞量和利用滞量, 在某些系统中引入了精心设计的延滞部件.

其中第(2)点是建立泛函微分方程理论的重要依据, 但三者都是这一理论的组成部分.

9.1.2 应用例子

在这些一般性的叙述之后, 我们要给出一系列不同应用背景中提出的泛函微分方程, 或

者稍加推导,或者给出引用的文献,使读者能概略地了解在动力系统中是如何引入滞量的,以及泛函微分方程及其广泛的类型和特点的.

例 9.1.1 设 $N(t)$ 为时刻 t 的人口总数,本地区允许的最大人口数目为 p_0 , $r = m - n$ 为人口的增长率, m, n 分别为出生率与死亡率,它们可以是 t 的函数. 1798 年,英国神父 Malthus 建立了最简单的人口增长模型:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \quad (9.1.2)$$

得出了人口按几何级数增长的结论. 1838 年, P. F. Verhulst 修改了式(9.1.2), 引入类似于电感器产生阻抗的生物反馈因子 $\left(1 - \frac{N(t)}{P_0}\right)$, 得出式(9.1.2)的修正式:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{P_0}\right) \quad (9.1.3)$$

考虑妊娠期及其他因素的滞后作用, E. M. Wright 给出比式(9.1.3)更为精确的时滞系统:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{P_0}\right) \quad \tau > 0, \quad (9.1.4)$$

更一般地有

$$\dot{N}(t) = N(t)f(N(t-\tau)) \quad \tau > 0, \quad (9.1.5)$$

其中 f 由物种发展的规律确定.

例 9.1.2 在例(9.1.1)中, $N(t)$ 表示某一物种的总数, $\dot{N}(t)$ 不仅依赖于 $t - \tau$ 时的种群数量, 而且由整个历史时期中的因素决定, 我们得到具分布时滞的生态方程:

$$\dot{N}(t) = N(t) \int_0^\infty f(N(t-\mu))P(\mu)d\mu \quad (9.1.6)$$

其中 $P(\mu)$ 是概率分布函数, 称为核. 通常有两种取法:

弱核函数:

$$P(\mu) = Ke^{-a\mu} \quad (9.1.7)$$

强核函数:

$$P(\mu) = K\mu e^{-a\mu} \quad (9.1.8)$$

且成立:

$$\int_0^\infty P(\mu)d\mu = 1 \quad (9.1.9)$$

例 9.1.3 考虑两种生物群之间的相互作用, 它们可以是捕食与被捕食、资源竞争或者互惠关系, 设捕食者总数为 $x_2(t)$, 被捕食者总数为 $x_1(t)$, 则二者的消长关系在不考虑滞后时可用如下的常微分方程组描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{P_0}\right) x_1(t) - c_1 x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + b_2 x_1(t) x_2(t) \end{cases} \quad (9.1.10)$$

方程组(9.1.10)中第一个方程的最后一项假定了捕食者的食量随 $x_1(t)$ 的增长而增长, 这通常是不合理的, 应当用消食功能函数 $\varphi(x_1)$ 代替 $c_1 x_1$, 对方程组(9.1.10)而言, 常用的 Holling 功能函数有如下三种形式.

适用于藻类及低等生物的 φ , 记 $b_1 = a_1/P_0$, 有:

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} \frac{b_1}{a_1}x_1 & 0 \leq x_1 \leq a_1; \\ b_1 & x_1 > a_1, \end{cases} \quad (9.1.11)$$

适用于无脊椎动物的功能函数为:

$$\varphi(x_1) = \frac{a_1 x_1}{1 + b_1 x_1}, \quad (9.1.12)$$

适用于脊椎动物的 φ 为:

$$\varphi(x_1) = \frac{a_1 x_1^2}{1 + b_1 x_1^2}. \quad (9.1.13)$$

于是方程组(9.1.10)应为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{P_0} \right) x_1(t) - x_2(t) \varphi(x_1) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + \frac{b_2}{c_1} \varphi(x_1) x_2(t) \end{cases} \quad (9.1.14)$$

考虑到捕食者的生殖周期较长, 记为 τ , 则方程组(9.1.14)中引入时滞后为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{P_0} \right) x_1(t) - \varphi(x_1) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + K \varphi(x_1(t-\tau)) x_2(t-\tau), K = \frac{b_2}{c_1}, \end{cases} \quad (9.1.15)$$

仍记 m 为出生率、 n 为死亡率, $a_1 = m - n$, 略去生物反馈因子(相当于 $P_0 = +\infty$), 方程组(9.1.14)简化为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = m x_1(t) - n x_1(t) - x_2(t) \varphi(x_1) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + K \varphi(x_1) x_2(t) \end{cases} \quad (9.1.16)$$

若捕食者只吃被捕食者的成虫, 而幼虫的成熟期为 τ_1 , 则方程组(9.1.16)为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = m x_1(t - \tau_1) - n x_1(t) - \varphi(x_1(t)) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + K \varphi(x_1) x_2(t) \end{cases} \quad (9.1.17)$$

若捕食者也有成熟期 τ_2 , 而且只有成虫才捕食食饵成虫, 则方程组(9.1.16)为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = m x_1(t - \tau_1) - n x_1(t) - \varphi(x_1(t)) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + K \varphi(x_1(t - \tau_2)) x_2(t - \tau_2) \end{cases} \quad (9.1.18)$$

类似地, 方程组(9.1.16)具分布时滞的方程组(9.1.17)为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= m \int_0^\infty x_1(t - \mu) P(\mu) d\mu - n x_1(t) - \varphi(x_1) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_2(t) + K \varphi(x_1) x_2(t) \end{aligned} \quad (9.1.19)$$

例 9.1.4 在环境污染问题中, 设污染物为有毒化学物质或放射性同位素. 物种在区域 D 中的总数为 $x_1(t)$, 物种个体内的毒素浓度为 $x_2(t)$, 环境中介质的毒素浓度为 $x_3(t)$, 若 $x_1(t)$ 的妊娠期为 τ_1 , 毒素在个体内停留 τ_2 时间后排出体外(对排出部分而言), 环境内毒素进入个体的平均时间为 τ_3 , 则得污染问题的数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r x_1(t) - c x_1(t) x_1(t - \tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = K x_3(t - \tau_3) - a x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -K_1 x_3(t - \tau_3) x_1(t) + g_1 x_2(t - \tau_2) x_2(t) - h x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (9.1.20)$$

其中, r, c, K, K_1, a, g_1, h 都是正常数, $u(t) \geq 0$, 表示毒素排入环境的速率. 对某些系统可设 $u(t) = \text{const}$ 也可以设 τ_1, τ_2, τ_3 中某一个或两个等于 0.

例 9.1.5 E. Volterra 改进了 V. Volterra 关于遗传学的一个数学模型, 是具分布滞量的二阶系统:

$$m\ddot{x}(t) + a^2x(t) + \int_0^{K(t)} K(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = g(t) \quad (9.1.21)$$

其中 m, a 为常数, K, g 为已知函数.

例 9.1.6 D. Israelson 与 A. Johnson 试图解释植物周期变化时导出了与例 9.1.4 类似的分布滞量系统. 例如, 向日葵当阳光改变角度时的转动反应总是存在滞后, 转角 α 应满足方程:

$$\dot{\alpha}(t) = -K \int_1^\infty f(\tau) \sin \alpha(t - t_0 - \tau) d\tau \quad (9.1.22)$$

例 9.1.7 对生物体循环的研究, 常常用放射性同位素或示踪蛋白, 它们在生物体中的分布与某些化工系统的循环类似, 都用线性差分微分方程组:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^N A_i \mathbf{x}(t - \tau_i) \quad (9.1.23)$$

表述, 其中 $\mathbf{x} \in R^n$.

例 9.1.8 麻疹传播的 London 与 Yorke 模型为:

$$\dot{S}(t) = \beta(t)S(t)[S(t-12) - S(t-14) - 2r] + r \quad (9.1.24)$$

其中, $S(t)$ 表示时刻 t 无免疫力的个体数目. $r(t)$ 是这种个体在人口中所占的比例, $\beta(t)$ 是人口特征函数, 两个滞量 $\tau_1 = 12, \tau_2 = 14$ 分别为麻疹传染的潜伏期上、下限. Cooke 与 Yorke 的淋病传播方程则为:

$$\dot{S}(t) = g(s(t - \tau_1)) - g(S(t - \tau_2)) \quad (9.1.25)$$

其中, g 是在某闭区间之外消逝的非负函数.

例 9.1.9 在光谱理论中有一类椭圆型泛函偏微分方程的边值问题:

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial x_j} + L_1(u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$$

$$u \Big|_{[0,d] \times \partial G} = 0, u \Big|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^m r_i^1(\mathbf{x}') u \Big|_{x_1=d}, u \Big|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^m r_i^2(\mathbf{x}') u \Big|_{x_1=d_1} \quad (9.1.26)$$

其中, $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{x}' = (x_2, \dots, x_n)^T, G \subset R^{n-1}$ 为一有界域, $n \geq 3$ 时 $\partial G \in C^2, \mathbf{x} \in Q = (0, d) \times G$, 算子 L 在 \bar{Q} 中是一致椭圆形的. $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{Q}), (i, j = 1, 2, \dots, n), r^1, r^2 \in C^2(\bar{G})$ 都是实值函数, $f \in L_2(Q)$ 是复值函数, $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_{m+1} = d. R$ 是混合型差分算子:

$$Ru(x) = \sum_{j=-N}^N b_j u(x_1 + j, x_2, \dots, x_n), b_j \in R,$$

Volterra 在研究某种弹性材料动力学时也提出了泛函偏微分方程:

$$U_t(x, t) - \Delta U(x, t) + \int_0^t \sum_{i,j=1}^n U_{x_i x_j}(x, \tau) \Phi_{ij}(t, \tau) d\tau = f(x, t)$$

$$U_t(x, t) - \Delta U(x, t) + R(x, t)U(x, \omega(t)) = f(x, t) \quad (9.1.27)$$

其中, $x \in R^n, \Delta$ 为 Laplace 算子, $R(x, t)$ 是一个线性微分算子, 对 $\forall t, \omega(t) \in [0, t]$.

例 9.1.10 在经济学中, 对资本主义经济的周期性危机有如下方程:

$$\dot{U}(t) = aU(t) + bU(t - \tau) + f(t). \quad (9.1.28)$$

H. Bateman 对商业零售问题给出方程

$$P(t) + \int_0^t f(\tau) P(t - \tau) d\tau = 1, \quad (9.1.29)$$

其中, $P(t)$ 为时刻 t 的店存商品数量, $f(t)$ 是商店补充进货速度.

J. Tinbergen 研究了造船工业的一个时滞微分方程:

$$\dot{x}(t) + bx(t - \tau) = \varepsilon x^3(t - \tau), \varepsilon = \text{const} \quad (9.1.30)$$

其中, $x(t)$ 表示时刻 t 的实有吨位数与计划值之差, $\tau = \text{cost}$ 表示建造一艘船的平均周期, b 为正常数.

例 9.1.11 物理学中的泛函微分方程是多种多样的, 如核物理中用计数器测量放射质点源强度时, 使得方程:

$$\dot{\pi}(t) + a[\pi(t) - \pi(t - \tau)e^{-a\tau}] = 0, \quad (9.1.31)$$

倘若考虑的是核反应堆的慢衰减, 则:

$$\dot{x}(t) = \int_t^{t+1} K(s)x(s)ds, \quad (9.1.32)$$

式(9.1.32)两边求导, 式(9.1.32)化为:

$$\dot{x}(t) = K(t+1)x(t+1) - K(t)x(t) \quad (9.1.33)$$

在弹性理论中考虑了遗留效应, 便得出:

$$\ddot{U}(t) + a^2 U(t) + \int_0^t \dot{U}(\tau) K(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (9.1.34)$$

当考虑三极管振荡器中的传输时间时, 导出了具有滞后变元的 Vander Pol 方程:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) - f(x(t - r))\dot{x}(t - r) + x(t) = 0 \quad (9.1.35)$$

R. Driver 等研究两个带电粒子在一定距离内相互吸引或排斥时, 考虑了引力传递的时间, 记相互作用的时滞为 $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, 得出运动方程:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t) - x_2(t - r_{21}(t)), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t - r_{21}(t))) \\ \ddot{x}_2(t) &= f_2(x_2(t) - x_1(t - r_{12}(t)), \dot{x}_2(t), \dot{x}_1(t - r_{12}(t))) \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

例 9.1.12 研究火箭发动机燃烧过程的低频振荡问题时, 记 $P(t)$ 为燃烧室的压力, 其稳态值为 \bar{P} . \bar{m} 是流过整个系统的稳态质量速率, \bar{M}_g 为发动机热燃气的平均质量, $f(P)$ 为液体燃料达到燃烧临界的质量速率, τ 是从进气到燃烧的时滞. 做下列代换以简化方程. 令:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\dot{m}_i - \bar{m}}{\bar{m}}, x = \frac{P - \bar{P}}{\bar{P}}, r = \tau \frac{\bar{m}}{\bar{M}_g}, \\ s &= t \frac{\bar{m}}{\bar{M}_g}, n = \left(\frac{d \log f}{d \log P} \right)_{p=\bar{p}} \end{aligned}$$

则 x 满足时滞方程:

$$\frac{dx}{ds} + (1 - n)x(s) + nx(s - r) = \mu(s - r) \quad (9.1.37)$$

例 9.1.13 大量考虑时滞问题的另一个领域是信息与控制系统. 例如 Minorsky 关于船艇摇摆的运动方程得:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + q\dot{x}(t - \tau) + Kx(t) = 0. \quad (9.1.38)$$

A. Callander 等讨论的自动调节系统则比方程(9.1.38)稍复杂一点:

$$\dot{\theta}(t) = \psi(t) + C(t) - u\theta(t) - \dot{C}(t+1) = v_1\theta(t) + v_2\dot{\theta}(t) + v_3\ddot{\theta}(t) \quad (9.1.39)$$

有人提出的最优控制系统模型,是用 Stieltjes 积分表示的滞后型泛函微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= P(t)x(t) + B(t)u(t), y(t) = Q(t)x(t) \\ \dot{u}(t) &= \int_{-r}^0 [d_{\theta}\eta(t, \theta)]y(t+\theta) + \int_{-r}^0 [d_{\theta}\mu(t, \theta)]u(t+\theta) \end{aligned} \quad (9.1.40)$$

在通信网络的研究中,关于无损传输线的数学模型是一个带有边值条件的偏微分方程,经变换后化为:

$$\frac{d}{dt}[u(t) - Ku(t-\tau)] = f(u(t), u(t-\tau)) \quad (9.1.41)$$

其中 $\tau = 2\sqrt{LC}$, L, C 分别为电感和电容.

例 9.1.14 数学的某些分支提出泛函微分方程的例子也不少. Cherwell 试图证明素数分布的一个性质: 设 $Z(n)$ 为不大于 n 的素数个数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z(n) \ln n / n = 1$, 于是导出了方程:

$$Z'(n) = -Z(n)Z(n^{\frac{1}{2}})/2n \quad (9.1.42)$$

显然, $Z(n) = (\ln n)^{-1}$ 是方程(9.1.42)的一个解.

例 9.1.15 古典的 Euler 几何问题: 求一个曲线使它能经运动而与它的渐缩线叠合. 设曲线的参数向量方程为 $r(s)$, s 表示弧长, 其曲率半径 $R(s)$ 应满足方程:

$$R(s) \frac{dR(s)}{ds} = R(C_1 + R(s)) \quad (9.1.43)$$

其中, C_1 为常数.

Poisson 的几何问题: 求一曲线 Γ , 使 Γ 上任意一点 $P(x, y)$ 的法线段 PR 的平方与过 R 的垂线段 QR 的平方之差等于 1. 这里 R 是过 P 的法线与 x 轴的交点, Q 是过 R 平行于 y 轴的直线与 Γ 的交点. 这就导出:

$$y^2(x) + y^2(x)y'^2(x) - y^2(x+y(x))y'(x) = 1 \quad (9.1.44)$$

我们再给出一些导出复杂变元泛函微分方程的例子.

例 9.1.16 具有信号型依赖性的某种系统, 以方程:

$$\ddot{x}(t) + 2\mu\dot{x}(t) + \gamma^2 x(t) + rx(t - \tau(t, x(t))) = 0, \quad (9.1.45)$$

为数学模型, 其中 μ, γ, r 皆为常数且恒设 $\tau(t, x(t)) \geq 0$.

例 9.1.17 K. L. Cooke 提出了一个生物科学中极为重要的方程, 它与遗传现象有关:

$$\dot{x}(t) + ax(t - h(t, x(t))) = F(t) \quad t \geq t_0, \quad (9.1.46)$$

J. K. Hale, R. D. Driver 研究了方程(9.1.46)当 $h(t, x(t)) = r - \mu K(t, x(t))$ 时的情形. B. H. Stephan 对 $r = 1, K(t) = \sin 2\pi t, F(t) = \sin 2\pi t$ 的情形讨论了周期解的存在性.

例 9.1.18 在时间对称电动力学中提出了如下的二阶方程:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{2}\alpha x(t - \tau) + \frac{1}{2}\beta x(t + \sigma) + \psi(t) \quad (9.1.47)$$

其中, $\alpha, \beta, \tau > 0, \sigma > 0$, 且都是常数, $\psi(t)$ 是给定的函数, 它也适用于某些大尺度的天文学问题.

物理学中得一维返回二体问题的方程为:

$$\ddot{x}(t) = x(x(t)) \quad (9.1.48)$$

经典的电动力学的二体问题中给出了下述数学模型:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(g(t, y(t)))) \quad (9.1.49)$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(g(t, y(t))), \dot{y}(g(t, y(t)))) \quad (9.1.50)$$

例 9.1.19 在博弈论中, 研究解的连续过程时导出了如下的 Cauchy 问题:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \min_{q} \max_{p} f(p, q, t, \dot{x}(t), x(g(t, x(t), \dot{x}(t))), \\ &\quad \dot{x}(G(t, x(t), \dot{x}(t))), t \geq 0 \\ x(t) &= \varphi(t), \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t), t \in R_- = (-\infty, 0] \end{aligned} \quad (9.1.51)$$

其中, g, G 是确定的, 但必须满足某种递推公式.

例 9.1.20 在生命个体的活细胞里, 控制酶反应的生物机制的一个数学模型为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, \dot{x}(t), x(g(t, x_t, \dot{x}(t)))), \\ &\quad \dot{x}(G(t, x_t, \dot{x}(t))), t \geq 0 \\ x(t) &= \varphi(t), \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t), t \in R_- \end{aligned} \quad (9.1.52)$$

其中, $x \in R^n$, g, G 也由某种递推公式确定.

例 9.1.21 Angelova 研究了金属切削理论中的一个二阶方程组:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t, P_i, x_i(t - P_i)), i = 1, 2, \\ P_i &= P_i(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)). \end{aligned} \quad (9.1.53)$$

解的振动问题.

9.1.3 名称及其缩写

上述一系列例子所导出的微分方程, 历史上曾使用过各种各样的名称, 这种极不规范的状况反映了人们认识过程的曲折. 例如称为“病态方程”、“泛函微分方程”、“时滞方程”、“后效过程”、“差分微分方程”、“具有偏差变元的微分方程”等. 从两个不同的角度来认识它们, 然后给以统一的名称.

首先, 诸方程中的未知函数, 如 $x(t)$, 其自变量为 t . 除此之外还出现不同于 t 但依赖于 t 的变元, 如 $x(t - \tau(t))$ 中的 $t - \tau(t)$. 这种变元的值偏离了 t 的值, 通常叫做“偏差变元”, $\tau(t)$ 叫做“偏差”. 从这个角度出发, 我们的研究对象可以统称为“具有偏差变元的微分方程”, 缩写为 DEDA (Differential Equation With Deviating Argument).

其次, 我们注意到, 若上述诸方程中不出现导数, 或者说不含有未知函数的导数, 那么它们都是广泛意义下的泛函方程 (或称函数方程), 缩写为 FE (Functional Equation). 因而我们所列出的诸方程统称为“泛函微分方程”便显得十分自然. 以后简称为 FDE (Functional Differential Equation).

今后采用 FDE 这一术语, 对于 FDE 中的“偏差”, 粗略地把它划分为三种类型.

1. 分立形式

若方程中偏差变元都可以写成 $t - \tau(t)$ 的形式, 则称偏差是“分立的”, 或者说是离散的. 这里的 $\tau(t)$ 是常数或仅为 t 的函数, 有时记 $t - \tau(t) = g(t)$, $g(t)$ 是仅依赖于 t 的偏差变元. 所以它不是新的独立变量.

这类 FDE 通常叫做差分微分方程, 缩记为 DDE (Differential Difference Equation). 例如方程 (9.1.4)、方程 (9.1.5)、方程 (9.1.15) 等.

2. 分布形式

若变元的偏差以积分形式出现在方程里, 则称偏差是分布形式的, 如方程 (9.1.6)、方

程(9.1.19)、方程(9.1.22)等.

考察未知函数具分布偏差变元的简单形式:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t+\theta) d\theta.$$

其中, α, β 是常数, 或者 $-\infty, +\infty$, 或者是 t 的连续函数, 无论如何, 偏差变元仍是依赖于 t 的函数. 对每一个 t , 它们的值可以与 t 的值比较大小. 例如 $\alpha = -1, \beta = 1$. 则:

$$\int_{-1}^1 x(t+\theta) d\theta = \int_{-1}^0 x(t+\theta) d\theta + \int_0^1 x(t+\theta) d\theta$$

右边第一个积分里偏差变元都不大于 t , 第二个积分里偏差变元都不小于 t .

3. 复杂偏差形式

这里指的是分立形式中的 τ 都不仅依赖于 t , 而且依赖于未知函数 $x(t)$, 甚至依赖未知函数的导数 $\dot{x}(t)$ 、 $\ddot{x}(t)$ 的情形, 如方程(9.1.43)、方程(9.1.44)、方程(9.1.45)等.

9.1.4 若干注释

注1 分立和分布两种形式的 FDE 是不相互包含的类型. 但它们可以在 Stieltjes 积分表示之下写成统一的形式, 如方程(9.1.40).

考察方程:

$$\dot{x}(t) = \int_0^r [d_{\theta} \boldsymbol{\eta}(t, \theta)] x(t - \theta) \quad (9.1.54)$$

式(9.1.54)右边是 Stieltjes 积分, $x \in R^n$, $\boldsymbol{\eta}(t, \theta)$ 是 $n \times n$ 有界变差函数阵.

若 $\boldsymbol{\eta}(t, \theta)$ 关于 θ 可微, 则方程(9.1.54)是分布形式 FDE. 适当选择 $\boldsymbol{\eta}(t, \theta)$ 便可得分立形式 DDE. 例如取:

$$\boldsymbol{\eta}(t, \theta) = \begin{cases} 0 & \theta = 0; \\ a & 0 < \theta < r; \\ a + b & \theta = r, \end{cases}$$

为了区别, 用 $(s) \int$ 表示 Stieltjes 积分, 则方程(9.1.54)为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (s) \int_0^r [d_{\theta} \boldsymbol{\eta}(t, \theta)] x(t - \theta) = \int_{\theta}^1 \boldsymbol{\eta}_{\theta}^1(t, \theta) x(t - \theta) \\ &\quad + x(t - \theta) (\boldsymbol{\eta}(t, \theta + 0) - \boldsymbol{\eta}(t, \theta)) \Big|_{\theta=0} + x(t - \theta) (\boldsymbol{\eta}(t, \theta) \\ &\quad - \boldsymbol{\eta}(t, \theta - 0)) \Big|_{\theta=r} = ax(t) + bx(t - r) \end{aligned}$$

还可以选取 $\boldsymbol{\eta}(t, \theta)$, 使方程(9.1.54)为同时有分立形式和分布形式的偏差变元, 如:

$$\boldsymbol{\eta}(t, \theta) = \begin{cases} 0 & \theta = 0; \\ a(1 - \theta \sin^2 t) & 0 < \theta < 1; \\ a \cos^2 t + b & \theta = 1, \end{cases}$$

这里 $r = 1$, 用类似的 Stieltjes 积分计算, 则方程(9.1.54)为:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - 1) - \int_0^1 \sin^2 t x(t - \theta) d\theta$$

注2 在一个 FDE 中, 可能同时出现两种甚至三种形式的偏差.

注3 对微分方程的有关术语,如线性、非线性、齐次、非齐次、自治、非自治等都可以平行推广到FDE上去,但要注意,无论变元有无偏差均应平等对待,如出现乘积 $x(t)x(t-\tau)$ 时应作为二次项看待,系统是非线性的.

9.2 分步法

9.2.1 单滞量的情形

根据基本初值问题的提法,给出一种在有限区间内求解FDE的方法——分步法.它类似于差分方程的分步法,但需要积分.即:

“在基本初值问题的提法中,把 E_{t_0} 上的已知函数代入方程,则当 $t \in Ft_0$ 时方程化为一个ODE(超前型方程的初值问题除外),求解这个ODE便得到此FDE在 Ft_0 上的解.”

例9.2.1 在 $[0, 2]$ 上求解Cauchy问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1); \\ x=t, t \in [-1, 0], (t_0=0), \end{cases} \quad (9.2.55)$$

第一步,由 $F_0 = [0, 1]$,在其上方程组(9.2.55)化为 $\dot{x}(t) = -(t-1) \Rightarrow$ 在 F_0 上的解为 $x_1(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + C$,由 $\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$.第二步,以 $t=1$ 为初始时刻, $F_1 = [1, 2]$, $E_1 = [0, 1]$,这时初始函数应为上一步的解 $x_1(t)$,同理,方程组(9.2.55)化为 $\dot{x}(t) = -\left[-\frac{1}{2}(t-1-1)^2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(t-2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$ 在 F_1 上的解 $x_2(t) = \frac{1}{3!}(t-2)^3 - \frac{t}{2} + C_2$,由 $x_1(1) = \frac{1}{2} = x_2(1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 1 + \frac{1}{6}$,故 F_1 上的解为:

$$x_2(t) = \frac{1}{3!}(t-2)^3 - \frac{t}{2} + \frac{7}{6}.$$

一般来说,在 $[t_0, \infty)$ 中用分步法求得解是不可能的,但在若干特别情形下是可以得到解的解析式的,我们指出如下两种类型.

第I类:可以归纳反复迭代积分规律的方程.

例9.2.2 对基本初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1); \\ x(t) = 1, t \in [0, 1], \end{cases} \quad (9.2.56)$$

用分步法求得解为:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N \frac{(t-n)^n}{n!} \quad t \in [N, N+1], N = 0, 1, \dots \quad (9.2.57)$$

例9.2.3 设 $a, c, \tau > 0$ 皆为常数,对Cauchy问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t-\tau); \\ x = C = \text{const.} \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (9.2.58)$$

用分步法求得解:

$$x(t) = C \sum_{n=0}^{1+\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]} a^n \frac{(t-t_0 - (n-1)\tau)^n}{n!}. \quad (9.2.59)$$

其中, $[\cdot]$ 表示取整数部分.

第 II 类: $F_{t_0} = R_{t_0}^+$ 的情形.

例 9.2.4 如下方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(te^{-t})); \\ x(t) = t^2, t \in E_1, t_0 = 1, \end{cases} \quad (9.2.60)$$

此时 $F_1 = [1, \infty)$, 用初始函数代入方程, 方程组 (9.2.60) 化为:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), t^2 e^{-2t}), x(1) = 1, \quad (9.2.61)$$

其中, $\psi(1) = 1^2 = x(1) = 1$. 解 ODE 初值问题 (9.2.61), 即得问题 (9.2.60) 在 $R_{t_0}^+$ 上的一个解.

例 9.2.5 具分布滞量的 Cauchy 问题, 同样可以用分步法, 如:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^0 g(t, x(t)) x(t + \tau) d\tau \\ x = e^t, t \in R_-, t_0 = 0 \end{cases} \quad (9.2.62)$$

此时, $E_{t_0} = R_-$, $F_{t_0} = R_+$, 方程 (9.2.62) 化为 ODE 的初值问题:

$$\dot{x}(t) = -g(t, x(t)) e^t, x(0) = 1 \quad (9.2.63)$$

我们看到, 对于第 II 种情形, 在应用分布法求解时, 只需一步即可完成. 对中立型方程同样可用分步法求解.

例 9.2.6 求 $[1, 3]$ 中 NDDE Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) + 2\dot{x}(t-1); \\ x(t) = 1, \dot{x}(t) = 0, t \in [0, 1], t_0 = 1, \end{cases} \quad (9.2.64)$$

$t_0 = 1$, $E_1 = [0, 1]$, $F_1 = [1, 2]$, 在 F_1 上方程为 $\dot{x}(t) = 1$, $x(1) = 1$. 解为 $x_1(t) = t$, 以 2 为初始时刻, $E_2 = [1, 2]$, $F_2 = [2, 3]$. 在 F_2 上, 有 $\dot{x}(t) = t + 1$, $x(2) = x_1(2) = 2 \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + t - 2$, 这里 x_1, x_2 分别为 $x(t)$ 在 $[1, 2]$ 、 $[2, 3]$ 上的限制.

对超前型方程的基本初值问题使用分步法求解的例子如下.

例 9.2.7 在 $[0, 2]$ 上求解 ADDE 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} x(t) = x(t-1) + \frac{1}{2}\dot{x}(t-1); \\ x(t) = 2t^2, \dot{x}(t) = 4t, t \in [-1, 0], t_0 = 0, \end{cases} \quad (9.2.65)$$

由 $t_0 = 0$, $E_0 = [-1, 0]$, $F_0 = [0, 1]$, 在 F_0 上由分步法得 $x(t)$ 在 F_0 上的限制 $x_1(t)$ 为:

$$x_1(t) = 2(t-1)^2 + \frac{1}{2} \times 4(t-1) = 2(t-1)t, t \in [0, 1] \quad (9.2.66)$$

其中, $x(0) = x_1(0) = 0$, 由 (9.2.66) $\Rightarrow \dot{x}_1(t) = 2(2t-1)$.

以 1 为初始时刻, $E_1 = [0, 1]$, $F_1 = [1, 2]$, 在 F_1 上有:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 2(t-2)(t-1) + \frac{1}{2} \times 2(2t-1) \\ &= 2 \left[(t-2)(t-1) + \left(t - \frac{3}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.2.67)$$

其中, $x_2(t)$ 是 $x(t)$ 在 F_1 上的限制, $x_1(1) = 0 \neq x_2(1) = -1$.

由此看到正向求解 A 型方程是微分延拓, 解存在的条件是苛刻的, 例 9.2.7 表明连续解只存在于 $[0, 1]$ 之上, 在 $t=1$ 处解已不连续了.

9.2.2 多滞量方程的分步法

例 9.2.8 考虑多滞量方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau) + cx(t - 3\tau) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-3\tau, 0], t_0 = 0 \end{cases} \quad (9.2.68)$$

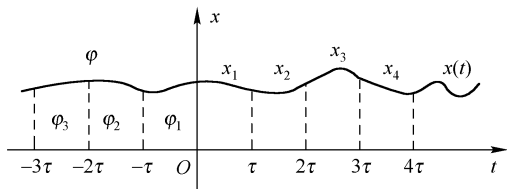


图 9.1

其中, $a, b, c, \tau > 0$ 都是常数, 如图 9.1 所示, 把初始函数 φ 在 $[-\tau, 0]$, $[-2\tau, -\tau]$ 和 $[-3\tau, -2\tau]$ 上的限制分别记为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, $x(t)$ 在 $[(i-1)\tau, i\tau]$ ($i=1, 2, \dots$) 上的限制记为 $x_i(t)$.

由定义, $t_0 = 0$ 时, $E_0 = [-3\tau, 0]$, 所以应当在 E_0 上给定初始函数 φ , $F_0 = [0, \tau]$, 在 F_0 上解为 $x_1(t)$, 它应满足 ODE 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + b\varphi_1(t - \tau) + c\varphi_3(t - 3\tau); \\ x_1(0) = \varphi(0), t \in [0, \tau], \end{cases} \quad (9.2.69)$$

可见 F_0 上方程组 (9.2.68) 的解仅由 φ_1, φ_3 决定, 而与 φ_2 无关. 求解方程组 (9.2.69) 得 $x_1(t)$, $t \in [0, \tau]$, 以 τ 为初始时刻, 则 $E_\tau = [-2\tau, \tau]$, 此时由 $\varphi_2, \varphi_1, x_1(t)$ 组成初始函数, $F_\tau = [\tau, 2\tau]$, 在 F_τ 上解为 $x_2(t)$, 它应满足:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = ax_2(t) + bx_1(t - \tau) + c\varphi_2(t - 3\tau); \\ x_2(\tau) = x_1(\tau), t \in [\tau, 2\tau], \end{cases} \quad (9.2.70)$$

积分得方程组 (9.2.68) 在 F_τ 上的解 $x_2(t)$, 它仅由 φ_2, x_1 决定而与 φ_1, φ_3 无直接关系.

当 $t_0 = 2\tau$ 时, $E_{2\tau} = [-\tau, 2\tau]$, $F_{2\tau} = [2\tau, 3\tau]$. 同理可得 $x_3(t)$, 它依赖于 φ_1, x_2 , 而不直接依赖于 φ_2, φ_3 和 $x_1(t)$. 如此继续下去, $x_i(t)$ 当 $i \geq 4$ 时都不直接依赖于 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 了.

注 1 在例 9.2.8 中为了明确说明初始函数各个部分解的每一段的直接影响, 把初始函数的限制记为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 事实上, 在方程中可直接用 φ 代入, 只要在求积计算过程中留心它的定义区间即可.

注 2 在例 9.2.8 的求解过程中, 第一步不可能超过 $F_0 = [0, \tau]$, 因为解在 $[\tau, 2\tau]$ 上还依赖于未知的 $x_1(t)$, 这说明为什么定义多滞量系统的滞效集 F_{t_0} 取诸 τ_i 所决定的滞效集 $F_{t_0}^i$ 的交集. $F_{t_0} = \bigcap_i F_{t_0}^i$. 换言之, 滞效集是用分步法求解时第一步便能够决定解的范围.

例 9.2.9 在 $[0, 4]$ 上求解初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-2) + 2x(t-3); \\ x(t) = t, t \in [-3, 0], t_0 = 0, \end{cases} \quad (9.2.71)$$

$E_0 = [-3, 0], F_0 = [0, 2]$, 在 F_0 上, $\dot{x}_1(t) = (t-2) + 2(t-3)$, $\varphi(0) = x_1(0) = 0 \Rightarrow x_1(t) = \frac{2}{3}t^2 - 8t$, 在 $F_2 = [2, 4]$ 上, 得到 x_2 满足:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \frac{3}{2}(t-2)^2 - 8(t-2) + 3(t-3)^2 - 4(t-3) \\ x_1(2) = x_2(2) = -10, \end{cases} \quad (9.2.72)$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{3}{2}t^3 - 18t^2 + 61t - 72, \quad t \in [2, 4].$$

分步法不仅提供在有效时间内求解析解的可能性, 而且对某些命题的证明和概念的理解很有帮助. 不仅如此, 分步法对构造一些例子与反例提供了有效的手段.

参 考 文 献

- [1] 叶彦谦. 常微分方程. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [2] 丁同仁. 常微分方程定性方法的应用. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 王寿松. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [4] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法. 北京: 科学出版社, 2001.
- [5] 阮炯. 常微分方程——方法与导引. 上海: 复旦大学出版社, 1991.
- [6] 庄万. 常微分方程习题集. 济南: 山东科学出版社, 2003.
- [7] 王柔怀, 伍卓群. 常微分方程讲义. 北京: 人民教育出版社, 1963.
- [8] 东北师范大学数学系. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1982.
- [9] 丁同仁, 李承治. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1991.
- [10] 现代数学手册(近代数学卷). 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.
- [11] 现代数学手册(经典数学卷). 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播作品的行为；歪曲、篡改、剽窃作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010)88254396; (010)88258888

传 真：(010)88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036